2013 年 11 月 12 日 (2013 年 11 月 19 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 6

前回までの訂正

- 黒板に書いた実数の連続性公理 5.19 ⇒ 5.12. • ∵ の説明の際の “because” が “beause” になっていたそうです.
- 講義ノート 34 ページ，脚注：脚注番号 6 が 2 つある．2 つめは 7 の間違い．
- **【重要】**講義ノート 45 ページ：「P ならば Q」は P が偽で Q が真となるとき偽，それ以外は真
  ⇒「P ならば Q」は P が真で Q が偽となるとき偽，それ以外は真

授業に関する御意見

- 今学期はじめて授業にでました．相変わらず，先生のギャグはつまらなかったです． **山田のコメント：** 残念です．無理にはおすすめしませんが，授業は出たほうがよいと思います．
- ターンエーの風がふく． **山田のコメント：** ふくんですか．
- 対応する英単語を与えていただけるのはありがたいです．「はさみうち」は何といいますか？ **山田のコメント：** the squeeze theorem らしい．
- 3 等分されていく羊羹が JOI のロゴのようでした．また「誰からも文句が出ないようになるまでやる」というのは経験上の例だと「$\sin(x)$ の値をマクローリン展開を用いて計算するとき double 型の変数の値が変わらなくなるまでやる」に近い気がしました． **山田のコメント：** それと本質的に同じ．Double 型の精度が羊羹の分配の際のけちくささに対応する．
- 「Cauchy の考え方」が「孔子の考え方」に聞こえて驚いた． **山田のコメント：** そりゃおどろきだ．
- 研究室でおかしなどはどのように分配されていますか？ **山田のコメント：** そういう機会があまりないのです．
- 羊かんはおいしいです ^q^ (こしあん派) 先生はどっち派ですか？ **山田のコメント：** つぶ？ どっちもですが．
- ようかん大好き! **山田のコメント：** me, too. • 羊羹は 3 つの面を底面とする四角錐で当分できますね． **山田のコメント：** なるほど!

質問と回答

質問： 質問用紙を提出している人の数は，やはり前期と比べて減っていますか? 期末テストで 60 点いかなかった場合の成績のつけ方は前期と異なりますか? **お答え：**前半：激減．後半：成積はつけません．成績なら多分つけますが．「相変わらず，先生のギャグはつまらなかった」というご意見の方ですね．漢字については前期最初の授業で説明しましたが，聞いてないか，記憶力が悪いか，欠席したか．ギャグは覚えているのに，残念ですね（罵倒モード）．

質問： 補題 5.1 の 2 つめの式の証明の資料にある部分の先を教えて下さい．

お答え： まず, 講義資料 5 の訂正を確認せよ．その上で $|x| \leqq |y|+|x-y|$ すなわち $|x|-|y| \leqq |x-y|$, $|y| \leqq |x|+|x-y|$ すなわち $|y|-|x| \leqq |x-y|$ が成り立つ．$\bigl||x|-|y|\bigr| = \max\{|x|-|y|, |y|-|x|\}$ なので結論が得られる．

質問： 補題 5.1 の証明で，第 2 の不等式の証明で，$|x| \leqq |x|+|x-y|$, $|y| \leqq |y|+|x-y|$ の 2 つをどのように式変形して $\bigl||x|-|y|\bigr| \leqq |x-y|$ となるのですか． **お答え：**講義資料 5 の訂正を見よ．

質問： $N = \max\{N_1, N_2\}$ の $\max\{\dots\}$ は関数ですか，写像ですか．そのどちらでもありませんか．

お答え： $\max\{x, y\}$, $\max\{x, y, z\}$, $\max\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ のように使いますが，定義域は何？強いて言えば，$\mathbb{R}$ の有限部分集合全体の集合から $\mathbb{R}$ への写像とみなすことができます．

質問： $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ の証明で授業で示した以外の証明はありますか． **お答え：**あります．

質問： $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ の証明ですが，log をつかって $\frac{\log n}{n}$ を持ち出すのは証明としていけないですか．

お答え： 大丈夫ですが，log の連続性が必要なのはよいですね．ところで $\{\frac{\log n}{n}\} \to 0$ はどうやって示しますか?

質問： $a_0 = 0$, $a_n = \frac{\log n}{n}$ である数列について $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ の証明は

> 任意の正の数 ε に対し $n \geqq N$ をみたす全ての n で $\left|\frac{\log n}{n}\right| < \varepsilon$ を満たす非負整数 N があればよい．$n \geqq 1$ で $\log n \geqq 0$ なので，不等式を変形すると $\log n < \varepsilon n \to n < e^{\varepsilon n} \to 1 < \varepsilon \frac{e^{\varepsilon n}}{\varepsilon n} \to \frac{1}{\varepsilon} < \frac{e^{\varepsilon n}}{\varepsilon n}$ $(\because \varepsilon > 0$, $n \geqq 1)$．ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$ より，任意の実数 M_1 に対して $x \geqq N_1$ をみたすすべての x で $\frac{e^x}{x} > M_1$ を満たす非負整数 N_1 が存在する．$M_1 = \frac{1}{\varepsilon}$, $x = \varepsilon n$ とすると，$\varepsilon n \geqq N_1$ で $\frac{e^{\varepsilon n}}{\varepsilon n} \geqq \frac{1}{\varepsilon}$ をみたす N_1 が存在する．この条件は $n \geqq \frac{N_1}{\varepsilon}$ と書ける．よって $N > \frac{N_1}{\varepsilon}$ を満たす最小の整数 N をとると，$n \geqq N$ を満たす全ての n で $\left|\frac{\log n}{n}\right| \leqq \varepsilon$ を満たす．ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

でいいですか．自分で見た感じだと，a_0 の扱いと $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$ の扱いが怪しい気がします．

お答え： a_0 の扱いは問題ない．実際，極限値には先の方の番号しか影響しないので，ここでは a_1 から始まっているとしてもよい．e^x/x の極限については補題 4.15．記述に「ε の見つけ方」が混じっています（$\log n/n < \varepsilon$ を変形するところ）が，これは下書きにとどめ，天下り式に書いたほうが，ロジックとしてはすっきりします．

質問： 講義ノートの「はさみうち」についてですが，高校では同じ内容を「はさみうちの定理」と読んでいました．定理というのは証明された真なる命題のことなので，今回のように「はさみうち」自体を証明する時以外は「はさみうちの定理」と呼んでも問題ないでしょうか．

お答え： 問題ない．証明の際も「はさみうちの定理を証明する」といえばよい．「証明された真なる命題」という意味では，高等学校で「はさみうちの**定理**」と呼ぶのは危険：教科書には証明は載っていないので．「定理」の第二の意味「証明された命題のうち特に注目すべきもの」という立場では，大上段に「定理」と名付けるには少々軽すぎるので，講義ノートでは恥じらいも込めて「はさみうち」としました．

質問： 実数の連続性の定義には他にどのようなものがあるのでしょう?

お答え： 今後の授業でいくつか（Weierstrass の区間縮小法，上限・下限の存在，Cauchy の収束条件）を紹介します．

質問： 公理 5.12 を実数の連続性と呼ぶのはなぜですか． **お答え：**「ぎっしりつまっている」ことを表すからでしょう．

質問： P 34 の以下をみたす番号 $N \sim$ とありますが，なぜ数でなくて番号と書かれたのでしょうか?

質問： なぜ番号 N なのですか． **お答え：**量よりも順番を表す，という気持ち．「正の整数」といってもよい．

質問： 自然数の数列 $\{n\}$ は上に有界でないという命題がありますが，「下に有界でない」という表現もあるのでしょうか． **お答え：**あります．

質問： $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ のように明らかとしか思えないのに証明が存在する例を考えると“数学の証明において「〜は自明であるので. . . 」という表現は不適切なのでしょうか．

お答え： **不適切です**．「明らか」という語は，「説明を求められたら理由を一言でいえる」という意味と思います．（そうでなければ「説明できない」という言い訳）例えば，ご質問の事実が成り立つ理由を一言で説明できますか．

質問： 高校の内容をよりくわしく復習しているような感じですが，高校レベルの理解では対応できない（理解がおいつかない）のはどのような部分になるのですか?

お答え： たとえば「はさみうち」の証明．たとえば，和差積商の極限公式の証明．高校の教科書にありましたか？

質問： ε を使った証明では，ε が限りなく 0 に近い値を取る，ということにより証明するのですか．

お答え： 授業で扱った例はそんなふうにしていましたっけ．「限りなく 0 に近い値」を定義してごらんなさい．

質問： 補題 5.2 の (2) はわざわざ書く必要がない気がいます．わざわざ α を指定しなくても，α 未満の任意の数で成り立つはずなので． **お答え：**実は「特に」以下が重要．補題 5.7 (3) (c) の証明で使っていますね．

質問： 定義 5.2 や 5.3 などは全ての ε や M を調べつくせない点で，未だあいまいのように感じるのですが，これはこれまでの極限の考え方とどれほど異なるものでしょうか．

お答え： 補題 5.7 (3) の証明はこれまでの考え方でできますか．冪級数の収束半径の議論などでも，この記述が重要．

質問： 任意の正の数 ε に対して $|e^N + \frac{1}{N} - e^N| < \varepsilon$ は $N > \frac{1}{\varepsilon}$ となる N に対して常に成り立ちますが，数列 $\{a_n\} = e^n + \frac{1}{n}$ は e^n に収束するといえますか?

お答え： e^n は一つの実数でないので，“e^n に収束” はナンセンス．「$a_n = e^n + \frac{1}{n}$ で定まる数列 $\{a_n\}$」と書くべき．

質問： 数学でいう “∞” というのは数字というより，むしろ記号という風にみなした方がいいのでしょうか? プリント P. 34 の定義を見ていると “∞” というのはとりあえず数が大きいというよりか何かそれら数という枠を超えた記号のように思えてきます．

お答え： 標準的な数学では ∞ は数でない．“$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$” は，左辺と右辺が等しいのでなく，ひとつの熟語．

質問：「無限小数はある実数に収束する」を無理数の定義にはなりませんか? つまり「無限小数で表される実数を無理数という」何か不都合は生じますか? すくなくとも「有理数でない実数」よりは正確な気がします．

お答え： **不都合です**．無限小数 0.3333 . . . は有理数 1/3 を表します．

質問： 無限小数は 1 つの実数をさだめると有りましたが，アトランダムに数字を並べたような無限小数であっても実数といってよいのでしょうか? **お答え：**それを**証明した**のが例 5.14．

質問： 単調非減少という言い方は一般的ですか．それともこの授業のみのものですか． **お答え：**一般的です．

質問：「非単調増加（減少）であること」と「単調増加（減少）でない」ということは異なる事象ですよね．

お答え： 同じではないでしょうか．「単調非増加（非減少)」とは違うと思いますが．

質問： 絶対値の概念をあまり理解できていません．どうすればよいですか．

お答え： 例えば講義ノート 34 ページを書いてあるとおりにじっくり読んで下さい．（講義資料 5 の訂正に注意）