

2013 年 11 月 19 日 (2013 年 11 月 26 日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

## 微分積分学第二 B 講義資料 7

### 前回までの訂正

- 黒板で「すべての」と書くべきところを「すべの」と書いたそうです。
- 黒板に書いた  $x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x$  の導関数が間違っていたそうです。
- 講義資料 6, 1 ページ, 下から 2 行目:  $|\frac{\log n}{n} \leq \varepsilon|$  を満たす  $\Rightarrow |\frac{\log n}{n}| \leq \varepsilon$  を満たす。
- 講義資料 6, 2 ページ, 2 行目:  $\text{varepsilon} \Rightarrow \varepsilon$
- 講義資料 6, 2 ページ, 下から 22 行目: しまく手  $\Rightarrow$  **しなくて** (ご指摘頂いた方: 場所を指定して下さい)
- 講義ノート 44 ページ, 例 6.10 の (1), 「恒等関数」の部分に次の脚注を追加:  $x$  に対して  $x$  それ自身を対応させる関数を恒等関数 the identity function という。
- 講義ノート 44 ページ, 下から 3 行目: (3)  $\Rightarrow$  (3 **ページ**)
- 講義ノート 46 ページ, 下から 8 行目: みなすせる  $\Rightarrow$  **みなせる**

### 授業に関する御意見

- 論理の話に関連して、「トリックオアトリート」と言われた時、お菓子をあげてもイタズラされる可能性がある、という話がありました。でも、そもそも Perl で “trick or treat;” はだいたい “trick に失敗 (戻り値が偽) したら treat する” という意味ですが、  
山田のコメント: Trick が成功したら treat は評価しないのね。面白いですよね。数学の命題は a priori に真偽が決まっているのたいてい、プログラムでは真偽を決定するために評価しなければならぬ (まあそちらの方が地上の世界ですよ)。したがって、その扱いが微妙に違う。ちなみに “Trick or treat” の答えは “Treat, please” ではないでしょうか。
- この前 OCW を見たのですが、講義ノートのタイトルが「第 1 回 第 1 回」のようにになっているのは仕様ですか?  
山田のコメント: 仕様です。仕様は「第 1 回 “講義タイトル”」なのですが、山田が面倒臭がって「講義タイトル」を「第 n 回」にしているのです。
- 授業中眠いのどうすればあるんですかね? 山田のコメント: 浴りません。経験上。
- 最近、稲谷さんや藤田さんの名前がよく出ますが、仲はいいのでしょうか。山田のコメント: 悪くはないです。
- “&” がうまく書けないです。どっちから書くのか? 山田のコメント: しりません。字体もいろいろあるようですね。
- でない deny... クスツ 山田のコメント: 使い古されたネタですが。

### 質問と回答

質問: 「任意の実数  $\alpha, \beta$  および全ての項が実数である任意の数列  $\{a_n\}$  に対し ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  かつ  $\alpha \neq \beta$ ) ならば ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta$  でない)」は正しいですか?

お答え: 正しいです。実際、ご質問の命題は  $\{a_n\}$  の極限值が存在するならばただ一つであるということですね。

質問:  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} & (x = \frac{n}{m} : \text{有理数}) \\ 0 & (x : \text{無理数}) \end{cases}$  で  $a$  が有理数のとき  $f(a) = \frac{1}{m}$  となり、全ての正の数  $\varepsilon$  に対して正の数  $\delta$  で「 $|x - a| < \delta$  を満たすすべての有理数  $x$  に対して  $|f(x) - \frac{1}{m}| < \varepsilon$ 」を満たすものが存在するとして、 $\varepsilon = \frac{1}{2m}$  とすればこれは成り立ち、 $f(x)$  は  $x = \text{有理数}$  のときも連続になりませんか?

お答え: なりません。2 箇所重大な間違いをしています (山田が下線をつけました)。「有理数」でなく「実数」でなければなりません。したがって  $|x - a| < \delta$  をみたす無理数も考えなければいけません。また、「 $\varepsilon = \frac{1}{2m}$  とすれば」としてはいけません。「任意の  $\varepsilon$  に対して...」を証明するときにはあなたは  $\varepsilon$  を特別の値にする権利はありません (と授業で説明しましたね)。

質問: 「 $a$  を除いたところで定義された関数」は「 $a$  で定義されていない」ではなく「 $a$  での定義の有無は考えていない。どちらでもよい」の意味と理解しますが、正しいですか? そうだとすると、通常の日本語、たとえば (あくまで例ですが) 「共産党を除く政党が賛成する〇〇法案」は「共産党は賛成していない」を意味し、「北海道を除く地方で見られる  $\times \times$  植物」は「北海道では見られない」を意味するので誤解されがちです。誤解なく表現するには「 $a$  はともかく  $a$  をのぞく...」とするとよいと思います。ただ冗長でわずらわしいので、それを正しく誤解なく表現するのが「 $I \setminus \{a\}$  で...」であると思いますが、いかがでしょうか。

お答え: 最初の方、正しいです。日常語の例えの「共産党を除く政党が賛成する〇〇法案」は「共産党は賛成していない」を含むのですか? やはり「言及していない」とするのが自然と思いますが、もちろん「共産党は賛成していな

い」と暗に言っているということなのかも知れませんが「明言はしていない」ということなのではないでしょうか。広告や新聞の見出しでこのような言い回しをつかって「だまし」ているものを時々見かけるように思います。

質問：  $\sin$  のマクローリン展開で示せる  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$  という等式はどうして円と関係なさそうなのに  $\pi$  がでてくるかずっとギモンだったんですが、 $\sin$  のマクローリン展開で得られる以外に何か円と関係がありますか？

お答え： とくにないと思います。前期にも円と直接関係ない文脈で  $\pi$  がでてきましたよね（ガウス積分）。 $\pi$  を円と無関係に定義することもできます。

質問： 二値論理以外にも論理はあるとおっしゃっていましたが、二値論理以外で面白いものやよく使われるものにはどういったものがありますか。また二値でも異なった論理体系は存在するのでしょうか。

お答え： 「多値論理」でググってみましょう。論理体系という言葉で何を想像するかにもよりますが。

質問： 「 $P \Rightarrow Q$ 」=「(not $P$ ) or  $Q$ 」がなぜ成り立つか分かりません。ベン図で考えると、「 $P \Rightarrow Q$ 」は包含関係、「(not $P$ ) or  $Q$ 」は領域を表しているように思えるのですが。

お答え： 「 $P \Rightarrow Q$ 」の定義と違って下さい。後半は意味がわかりません。どのように考えたのでしょうか。とくに「領域」という語をこの講義（前期でやりましたね）で使っているのとは違った意味で使っているように推測できますので、何をおっしゃっているか通じません。

質問： 黒板で  $\varepsilon$   $\delta$  論法のあとにやった “ $f(x)$  が  $x = a$  で連続” の件と、定義 6.5（からの帰結）でやった “ $f$  が  $a$  で連続” の件がありましたが、2 つの違いが分かりません。2 つは同じなのですか。また違うとすれば何が違うのか教えてほしいです。

お答え： 黒板に書きながら「講義ノートの書き方だと “ $f$  が  $a$  で連続” といいますね」と呟いたはず。したがって同じです。

質問：  $\varepsilon$ - $\delta$  論法で「正の数  $\delta$  で次をみたくものが存在」という部分を「任意の正の数  $\delta$  で...」とは書けないのでしょうか。

お答え： 書けません。どんな  $\delta$  を持ってきてもよいわけではありません。 $\varepsilon$  を与えた時に少なくとも 1 つが見つければよいので。

質問： 高校では補集合を示す際  $\bar{A}$  と習いましたが、 $A^c$  と書く方が一般的なのでしょうか。

お答え： 山田が知る限りそう。位相空間の集合  $A$  の閉包を  $\bar{A}$  と書くことが多いので（意味がわからなければきかなかったことにしてください）。気になるのですが「補集合を示す際」ではなく「補集合を表す際」ではないでしょうか。数学の文脈では「示す」というのは「証明する」と同義に使うことが多いので。

質問： あらゆる点で微分可能でなく連続な関数は、グラフにするとフラクタルになるような線分のことでしょうか。

お答え： あなたが考えているフラクタルの定義は何ですか。

質問： 命題 6.3 でもとまる  $\delta$  について、これは定義 6.1 で扱う  $\delta$  が求まるということでしょうか。といいますか、定義 6.1 が今までの「収束」とどう違うのがよくわかりません。

お答え： いままでの収束と全く違いません。

質問：  $\varepsilon$ - $\delta$  論法を用いるメリットがまいちわかりません。極限の考え方で不十分な点があるのでしょうか。

お答え：  $\varepsilon$ - $\delta$  論法が極限の考え方なんですが、あなたがいう極限の考え方を説明していただけませんか？

質問：  $\varepsilon$ - $\delta$  論法の定義とはなんですか。また、どうして  $\varepsilon, \delta$  をもちいたのですか。

お答え： 前半：講義ノート定義 6.1 のこと。ちゃんと読んで！ 後半：しりません。

質問： プリント P 45, 6.3 ド・モルガンの法則の • 「 $P$  でない」は  $P$  の真・偽を入れ替える、の意味がちょっとわかりにくいです。わかりやすい説明があるとうれしいです。

お答え：  $P$  が偽のときは真、 $P$  が真のときは偽。

質問： プリント P 49 定理の (2) は  $a_{n+1} \geq a_n, b_{n+1} \leq b_n$  という風に置きかえてもよろしいのでしょうか？

お答え： よろしくありません。不等号の向きが逆です。

質問：  $f_1(x), f_2(x)$  がテイラー展開できて  $f_1^{(n)}(0) = f_2^{(n)}(0)$  なら  $f_1(x) = f_2(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) の理由がよくわかりません。

お答え： 文脈がよくわかりません。

質問： 質問のネタが無い時はどうすればいいですか？

お答え： 講義資料を熟読する。