2013 年 11 月 26 日 (2013 年 12 月 3 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 8

お知らせ

- 申し訳ありませんが，以前お知らせしました通り，12 月 17 日は休講とさせて頂きます．
- 1 月 7 日に**中間試験**を行います．**12 月 10 日** に**予告** をいたしますので，お誘い合わせの上お越しください．

前回までの訂正

- $\alpha^n-\beta^n=(\alpha-\beta)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots+\beta^{n-1})$ の最後を β^{n-1} と書いていたそうです．
- 講義資料 5, 1 ページ，前回の訂正：(講義ノート 31 ページ，下から 4 行目) $(N+1)(n-N)\Rightarrow(N+1)^{n-N}$
- 講義資料 7，1 ページ，下から 6 行目：北海道をの ⇒ 北海道を
- 講義ノート，52 ページ，脚注：大きい方，小さい方 ⇒ 小さくない方，大きくない方
- 講義ノート，54 ページ，定理 7.13 の証明，証明終わりの 2 行上：成り立つ ⇒ が成り立つ
- 講義ノート，61 ページ，最初の 4 行を次のように修正；それに伴いそれ以下の $\frac{4}{3q}$ を $\frac{2}{q}$ に修正．

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^q=1+\frac{q}{n-1}+\frac{q(q-1)}{2(n-1)^2}\left(1+\frac{\theta}{n-1}\right)^{q-2}\geqq 1+\frac{q}{n-1}-\frac{q(1-q)}{2(n-1)^2}$$
$$\geqq 1+\frac{q}{n-1}\left(1-\frac{1-q}{2(n-1)}\right)=1+\frac{q}{n-1}\left(1-\frac{1}{2(n-1)}\right)\geqq 1+\frac{q}{2(n-1)}\geqq 1+\frac{q}{2n}$$

  ここで $0<q<1,\ n\geqq 2$ を用いた．
- 講義ノート 61 ページ，上の修正にともなって，$\frac{4}{3q}$ を $\frac{2}{q}$ に修正．

授業に関する御意見

- 調和数列は各国が前後二項の調和平均になっているので，この名があるらしいです．最近，授業中の私語が少し気になります．
  山田のコメント： 前半：そちらが先でしょうか．不自然な気がします．後半：了解．気をつけましょう．
- X の上限が X の要素であるとき，それを最大値という，も真ですけど，上限の定義に最小値の定義を含むので，説明の無限ループが発生してしまいますね．なんかの本で石：岩より小さい固体，岩：石より大きい固体みたいな辞書のループを指適（原文ママ：指摘のこと？）してたのを思い出しました． **山田のコメント：** 講義ではそう言いましたが，講義ノートではこの言い方を避けています．
- （質問が）あまり関係ないことでごめんなさい．ちょっとめんどくさいだけでできしおうな気はするのですが． **山田のコメント：** 実は簡単．
- 正月明けに中間テストをやるなんて．．．．正月に勉強しろということですか (泣) **山田のコメント：** そうですが何か．
- 数学みたいな授業だとおっしゃっていましたが，数学じゃなかったら先生は何の講義をしてみたいですか． **山田のコメント：** 講義は数学か算数しかできませんね．ちなみにこの講義は算数のつもり．
- ドイツ語習っていますが，ずっとエス・ツェットとベータは同じ書き方だと思ってました． **山田のコメント：** ß; β.
- 再帰テスト（原文ママ）((原文ママ）まで原文ママ)(((原文ママ）まで原文ママ）まで原文ママ)((((原文ママ）まで原文ママ）まで原文ママ）まで原文ママ） **山田のコメント：** そうね
- 無理数マンになりたい． **山田のコメント：** そう？
- おなかすいたなァ **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問： 連続性の公理 5.12 から定理 7.8 を証明することはできますか． **お答え：**講義ノートでしていると思いますが．

質問： 定理 7.8 を公理として実数を構成することはできますか． **お答え：**「構成」が何をさすかが微妙ですが，はい．

質問： 確かめたいのですが，$X\subset\mathbb{R}$ に上界があれば，そのうち一つが必ず上限であり，上限が最大値であることもある，ということですか． **お答え：**そうです．

質問： 黒板では「X の上界が X の要素であれば，その値は X の最大値である」というような説明をしていましたが，上界の定義を考えると，X の上界の中で X の要素となるのは X の上限だけなので，「X の上限が X の要素なら，その上限は X の最大値である」と考えても正しいですか． **お答え：**正しいです．

質問： X $(\subset\mathbb{R})$ の最大値が存在するときその最大値は上限でもあるということでよろしいですか **お答え：**例 7.6 (3).

質問： M が X の上限であるとするとき，M は X の最大値と言えますか．$M\in X$ であれば言えることになりますか．

お答え： いいえ/はい．例 7.6 (2), (4).

質問： 「X の上界が X の要素であるとき最大値である」とのことでしたが，「X の上限が最大値である」と同じと言えますか? **お答え：**言えません．例 7.6 (2)

質問： 連続でない関数についても，最大値・最小値はしっかり定義できるのでしょうか.

お答え： 最大値，最小値の定義には連続性を用いていないのでは? $I \subset \mathbb{R}$ で定義された関数 f を考えるとき，$a \in I$ で「任意の $x \in I$ に対して $f(x) \leqq f(a)$」となるものが存在するなら f は a で最大値 $f(a)$ をとるという.

質問： 上限，下限が一致するときは定数関数であるとしていいのですか?

お答え： $I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 f に対して $\alpha = \sup_I f = \inf_I f$ とせよ．$\alpha = \sup_I f$ $(\inf_I f)$ だから，各 $x \in I$ に対して $f(x) \leqq \alpha$ $(f(x) \geqq \alpha)$．したがって $\alpha \leqq f(x) \leqq \alpha$ なので $f(x) = \alpha$ $(x \in I)$ となり，f は定数関数.

質問： 注意 7.9 の例について $x < \sqrt{2}$ をみたす最大の有理数を X の上界の最小値と呼ぶことはできないのですか?

お答え： できません．そんな有理数は存在しないからです.

質問： 注意 7.9 で定理 7.8 や有理数に対しては成り立たないと書いてありますが，$X = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 \leqq 9\}$ のようにすれば 3 が X の上界でかつ上界の最小値になうと思うのですが，これはダメですか？

お答え： 「実数 x に対して $x^2 > 0$ が成り立つ」は正しくない．このとき「$2^2 > 0$ ですがだめですか」と聞きますか?「上に有界な有理数の部分集合は（有理数の）上限をもつ」は正しくない，というのも同じレベル.

質問： p. 59 の命題 8.6 について，見た感じだとほぼ自明のように思えるのですが，この命題というのはわざわざ教科書 (?) に証明をのせる程重要なものなんでしょうか? **お答え：**重要です．「自明」と思うならなら「一言で」理由を説明せよ．ちなみに，この二つの級数の和の値は一致するとは限らない，ということは理解していますね.

質問： $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 6$ の奇関数の実根の存在証明（なんか日本語が辺ですが，原文ママ）で，「$x \geqq a \Rightarrow f(x) \geqq 1$」となるような a,「$x \leqq b \Rightarrow f(x) \leqq -1$」となるような b があるとしたとき $a > b$ として良いとしたのは，$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ からですか? **お答え：**いいえ.「してよい」はまずかった．自動的に $a > b$ が成り立つ．実際，$a \leqq b$ なら a のとり方から $f(b) \geqq 1$，b のとり方から $f(b) \leqq -1$ となり矛盾.

質問： 唯一性を証明するとき，いちいち a, a' みたいなものをおくのが大変なんですが，もっと簡素で強力な証明法はありますでしょうか. **お答え：**一番簡素で汎用性の高い手法として紹介した．もっと簡素な手法をみつけよ.

質問： ただ 1 つであることのところで，$c_1 > 0 \wedge c_2 > 0$ のとき $c_1^n = c_2^n = a \Leftrightarrow c_1 = c_2$ (1) とありますが，$c_1 < 0 \wedge c_2 < 0$ のときも (1) が成り立つというのは証明できるのでしょうか?

お答え： $d_1 = -c_1, d_2 = -c_2$ とおいて前半の結果を用いる.「ただ 1 つであることのところ」は，明示的に指定すべき.

質問： 最大最小値の定理などで用いた区間縮小法，確かにアルゴリズムとしては単純ですが，ではもっと効率のよいアルゴリズムは何かあるのでしょうか. **お答え：**数値解析の教科書を見よ．古典的には，ニュートン法など.

質問： 「区間 $[a, b]$ で連続な関数 f は $[a, b]$ で最大値をとる」の証明で 2 分法を用いて常に「山のてっぺん」を含むように区間を縮小していき，行きついたところが最大値との説明と理解しましたが，山のてっぺん = 最大値とすれば，結果をつかって結果を証明していることになりませんか? あるいは「山のてっぺん」は最大値でなく，注意 7.7 で与えられる上限であり，上限をあたえる c が $[a, b]$ 内にあるから $f(c)$ が最大値であるという証明でしょうか?

お答え： 後半が正しい.「山のてっぺん」は単純にたとえ話で，講義ノートの証明では「上限が小さくない方の区間」をとる，となっています．山のてっぺんのたとえ話を知っていれば，この証明は再現できるでしょう．それだけ.

質問： ワイエルストラスの区間縮小法は何か他の証明で使いますか. **お答え：**はい．交代級数の収束とか.

質問： 非増加，非減少という言葉を何故わざわざ使うのですか? **お答え：**減少，増加とは限らないから．数列 $\{a_n\}$ が単調非増加とは $a_n > a_{n+1}$ ではなく $a_n \geqq a_{n+1}$ が成り立っているということ（と何回も説明したはず).

質問： 講義資料の P34 で数列が秋霜するとは直観的には「どんどん近づく」という内容があります．定理 7.1 で c はすべての番号 n に対して $a_n \leqq c \leqq b_n$ をみたす唯一の実数であるとなっていて，c は $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の共通の極限値のはずですが,「どんどん近づく」値 c を唯一の実数と表現してもよいのでしょうか.

お答え： 意味がわかりません．極限値は実数ですが.「どんどん近づく」はあくまでもたとえ話.

質問： イプシロンデルタ論法が難かしいのですが，今の時点ではっきり理解したほうが良いですか. **お答え：**あなたの「はっきり」がどの程度かわからないので回答できません．いま,「はっきり理解している」と断言できるのは何?

質問： ßは ss と書いたら良いと思う. **お答え：**（フォントがないのですが）ßの書き方が正しくないようです.

質問： 物理学の電磁気で，$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(r)$ という式が出てくるのですが，$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ を定義通りに計算すると，$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ となるが，右辺は 0 といいがたい（ほぼ成り立っていそうだが）です．数学者からすると δ 関数の存在ってどういものなのですか? $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. **お答え：**超関数と解釈するのが普通．$\mathbb{R}^3$ 上の関数 f を，任意の関数 φ に対して $\varphi \mapsto \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x)\varphi(x)\,dx$ という積分値を与える対応（写像）と同一視することで,「関数の値」が存在しなくても「積分として意味をもつ」ような一般化された関数を考えられる.（Schwarz の超関数のアイディア).たとえば，Dirac のデルタ関数とは，“$\iiint_{\mathbb{R}^3} \varphi(x)\delta(x)\,dx = \varphi(0)$” という性質で定義される（いい加減な説明).