2013 年 12 月 3 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 9

お知らせ

- 次回，12 月 10 日に中間試験の予告をしますので，皆様お誘い合わせの上お越しください.
- 12 月 17 日は休講とさせていただきます.

前回までの訂正

- 講義資料 5, 1 ページ，最後から 2 番目の訂正：31 ページ ⇒ 32 ページ
- 講義資料 8，2 ページ，14 行目：ならなら ⇒ なら • 講義資料 8，2 ページ，下から 13 行目：秋霜 ⇒ 収束
- 講義ノート，58 ページ，6 行目：$n \geqq 2^m \Rightarrow n \geqq 2^m - 1$; 次の行：$s_n \geqq s_{2^m-1} = \sum_{k=1}^{2^m-1}$
- 講義ノート，59 ページ，12 行目：$\sum_{k=0}^{n} a_n; \sum_{k=0}^{n} b_n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k; \sum_{k=0}^{n} b_k$
- 講義ノート，65 ページ，例 8.10 (3)：$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \dots \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} \dots$ (2 箇所)
- 講義ノート，62 ページ，3 行目：$b_{j+1} - b_j = s_{2j+2} - s_{2j-2} \Rightarrow b_{j+1} - b_j = s_{2j+2} - s_{2j}$
- 講義ノート，63 ページ，問題 8-2：このとき，にたいして ⇒ このとき,
- 講義ノート，63 ページ，問題 8-8：「ただし α は実数の定数である」を削除.
- 講義ノート，67 ページ下から 7 行目：$beta \Rightarrow \beta$ • 講義ノート，69 ページ脚注 3：m 定理 9.14 ⇒ 定理 9.14

授業に関する御意見

- かなり前の訂正ですみません.　**山田のコメント：** いいえ，たすかります.
- ご意見の語尾に「. . .」を付けるとかならず省かれてプリントにのります．先生も「. . .」嫌いなんですか.　**山田のコメント：** 目が悪い（老眼）ので，見えていない可能性が高い.
- ワイヤレスマイクは 800MHz 帯だそうです.　**山田のコメント：** それじゃ WiFi で妨害はできそうもないですね.
- Σ 記号でなくて “和” にしたら，けっこうはやると思うのですが，TEX だとどんな感じでしょうか.　**山田のコメント：** $\mathop{和}_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$
- 前期の定期試験の答案を返却いただけますか.　**山田のコメント：** はい.
- なんで，私がベトナムに（その結果，家でゆっくり質問を考えられない）　**山田のコメント：** え?

質問と回答

質問： 問題 8.6 1) 「$\sqrt{n(n+1)(n+2)} > \sqrt{n^3} = n^{3/2}$ だから，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} < \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$. これ（右辺）は (8.3) で $p = -1.5$ の場合なので収束する．だから左辺も収束する．正しいですか.

お答え： Ok. 細かいこと：和の存在が未知のものを不等式で比較しているのが本当はまずい．命題 8.6 を使えばよい.

質問： 問題 8.6 2) $1/n^{\log n}$ がわかりません．ヒントください.　**お答え：** $n \geqq 9$ なら $\log n > 2$.

質問： 注意 8.7 は交代級数でも成り立つのですか.　**お答え：** 「最初の有限個は気にしなくてよい」という部分は成立.

質問： 絶対収束は各項の絶対値をとっても収束するので，逆に各項同士をつなぐ記号が項ごとに $+$, $-$ のうちランダムに選ばれてもかならず収束する数列（山田注：級数のこと?）も存在するのでしょうか．つまり $\{i_n\}$ を全ての正の整数 n で $i_n = 1$ または -1 としたとき，どんな $\{i_n\}$ についても $\sum_{n=0}^{\infty} i_n a_n$ が収束するような数列 $\{a_n\}$ が存在するのでしょうか.　**お答え：** 絶対収束する級数なら，符号をどう付け替えても収束する．今回のテーマ.

質問： 例 8.8 で $-2 < p < 1$ のときの収束の証明で $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^q \geqq 1 + \frac{q}{n-1} - \frac{1}{4(n-1)^2} \geqq 1 + \frac{q}{n}$ として（中略）収束を証明してもいいのですか?　**お答え：** 最後の不等号はどうして成り立つのでしょう.

質問： たいていの級数は自力では計算できないと思うのですが，計算ソフトなどを使えば全ての級数を計算できるのでしょうか？　**お答え：**近似値は大丈夫（収束が遅い級数の場合は知恵が必要）．厳密な値では：級数の和の計算は問題毎のテクニックが必要なので，ソフトウェアが知っているパターンなら計算できるが，一般には計算できない．

質問： 交代級数のところで，このような級数の項を足す順番を考えれば 3 にできるとおっしゃっていたと思うのですが，あやしい交代級数なら，その操作でどんな実数の値にもできるのでしょうか．

お答え： 「あやしい」が怪しいが，条件収束する 級数なら，項の順番を入れかえれば任意の実数に収束させられる．

質問： 級数は収束しない場合，無限に発散するだけでなく振動することもありますよね．振動するときはどのように表記すればいいのでしょうか．日本語で「振動する」と書くしかないのでしょうか．

お答え： なにか記号があるか，という意味ならない．英語で oscillates と言ってもよいです．

質問： $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ は振動ですか？　**お答え：**まず，この級数が発散することはよいですね．振動の定義は？(高等学校の教科書を見よ．) その定義に適合するかどうか考えよ．

質問： $\{s_n\}$ が単調非減少数列であれば $\{s_n\}$ が収束 $\Leftrightarrow$ $\{s_n\}$ が上に有界，を実数の連続性と関連づけて講義して下さいましたが，まだ，数列の収束が実数の「連続性」にどうつながるのかよく分かりません．特に，上限・下限の存在と実数の連続性についてお願いします．

お答え： なにか誤解してませんか？ この講義では「上に有界な単調非減少数列は収束する」という命題が 実数の連続性．他に「連続性」というものがあって，それと関連がつくというものではない．この性質を認めて導かれる性質が実数の性質である，というのが普通の数学の立場．もっとも，連続性として最初に仮定する命題（公理）のとり方は何通りもあって，たとえば「上限・下限の存在」を連続性の公理にすることもある．講義ノートでは，上限・下限の存在を実数の連続性公理 5.12 から導いているわけで，どこか別のところの「連続性」と関連づけたわけではない．

質問： $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ について，$\sum_{k=0}^{n}(-1)^n = s_n$ とすると，n が奇数なら $s_n = 0$，n が偶数なら $s_n = 1$ であるから $\lim_{n\to\infty} s_n$ は発散（振動）するので，特定の値（和）を定めること自体おかしいような気がするのですが，どうでしょうか．　**お答え：**ということを最初の 15 分くらいで喋ったわけです．

質問： $\frac{1}{1-x^3} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots = (x - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{7}x^7 - \dots)'$ $(-1 < x < 1)$（原文ママ：左辺の分母のマイナスはプラスのはず）に 1 または -1 を代入したとき，何か別の意味をなす値に収束することはありますか？

お答え： 右辺をどう見るかによりますが，今回やるアーベルの定理参照．

質問： 有理数の有限和は有理数なのに無限和が無理数になることがあるのが不思議です．有理数の無限積が無理数になるような例はありますか？　**お答え：**正弦の無限積表示 $\sin(\pi x) = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ の $x = 1/4$．

質問： 「$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}$ が成り立つ」という話を聞いたことがあるのですが，どうしてそうなるのですか．

お答え： もちろんこの等式は嘘で，左辺は正の無限大に発散．しかし「ある特別な見方をするとこのように思うことができる」：一般に，複素数 s に対して $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots$ と定める．右辺の無限級数は $\mathrm{Re}\, s > 1$ のときに収束するので，本来 ζ の定義域は $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, s > 1\}$ であるが，ある方法（解析接続）でその定義域をほぼ複素平面全体に拡張することができる ($s = 1$ では定義できない)．こうして得られた（定義域を拡張した）関数も同じ記号 ζ で表すと $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$．キーワード：リーマン・ゼータ関数，関数等式，解析接続．

質問： 無限大記号 ∞ の使い方について，シグマの中で $\sum_{k=1}^{\infty}$ のように書かれるときは，文脈的に ∞ が整数と判断すべきですが，この場合 ∞ が整数であることの説明は一切不要ですか？

お答え： どの文脈でも ∞ は整数ではない．それどころか ∞ は数ですらない，ということは何回も授業で注意したはずですが．ここでは $\sum_{n=0}^{\infty}$ は一つの文字と思って，それぞれを分解して意味をもたせることはしません（定義 8.1)．

質問： 幾何関数が結局よくわからなかった（聞き逃した）ので簡単に教えていただけるとうれしいです．

お答え： 幾何関数などという言葉は出していない（たぶんない)．簡単に教えると：等比級数のことを幾何級数ともいう．

質問： 幾何の話など，5 類では使わないと思われる話をするのはなぜですか．　**お答え：**なぜ使わないと思うのですか．

質問： 級数の英語 series と progression に意味の差はありますか．

お答え： ないと思いますが，定かではありません．一般的には series を使うような気がします．

質問： 級数：a series とありますが，なぜ複数形なのに a がついているのですか？

お答え： 複数形なんですか？ 単数は serie? 辞書を引いてみて下さい．ここでは単数として使っています．

質問： 講議ノート p. 66 上から四行目：誤）$n \geqq N$ なる 正）$n \geqq N$ となる．

お答え： これは誤りでないつもり．「誤」と書いた言い回しは普通では？ ちなみに「講議」に反応して 0 点．

質問： 2 月 4 日をテストにしないのは授業したという実績を確保するためですか．

お答え： いいえ．2 月 4 日にはもともと山田の都合で試験ができないのでした（国際研究集会主催のため)．