2013 年 12 月 10 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 10

お知らせ

- 中間試験（2014 年 1 月 7 日）の予告をいたしました．欠席の方は web で確認願います．
- 次回，1 月 14 日の講義ノートは中間試験の日に配布いたします．
- 今回は提出物の受付はいたしません．
- 次回 12 月 17 日は休講とさせていただきます．良いお年をお迎え下さい．

前回までの訂正

- 最初の黒板の誤りだそうです：

$$1 - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots = \frac{1}{1+x} \qquad (x = -1) \qquad \Rightarrow \qquad 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1+x} \qquad (x \neq -1)$$

注：この式が $x \neq -1$ で成り立つのでなく，右辺が $x \neq -1$ で定義されるという意味でしたが伝わっていますね．
- n の虚数乗の定義（間違ったかも知れない）：複素数 $u + iv$ （u, v は実数）に対して $n^s = n^u e^{iv \log n}$.
- 講義ノート，66 ページ 5 行目：$a_n \leqq \alpha + \varepsilon \Rightarrow a_n < \alpha + \varepsilon$ （全体として同値になるのでどちらでもよいのだが，ほかの部分で “$<$” として使っているようなので）.
- 講義ノート，69 ページ 1 行目：$N \Rightarrow N_1$ • 講義ノート，69 ページ 7 行目, 10 行目：$p'_m \Rightarrow p_{m'}$
- 講義ノート，69 ページ脚注：含まれていないが m 定理 9.14 から ⇒ 含まれていないが定理 9.14 から（m を削除）
- 講義ノート，71 ページ 10 行目：$|a_n| > r^{>}1 \Rightarrow |a_n| > r > 1$

授業に関する御意見

- “和” 記号ありがとうございます．国際集会で紛れ込ま. . . せ. . . **山田のコメント：** ちょっとむずかしいかと．
- アールを「r」と書いたり「r」(山田注：下に短い横線［アシ］付き）とかいたりしていますが，何か違いはありますか． **山田のコメント：** ないです．
- 腕時計が苦手なのでしたら懐中時計などは如何でしょうか． **山田のコメント：** ポケットが重くなりそうで. . .
- 最近はベッド内のポテンシャルが低くて抜けだせません.. **山田のコメント：** 授業に出たいというエネルギでなんとかポテンシャルの壁を超えよう．
- インデックス. . . また（ムゲンに続き）井口裕香か． **山田のコメント：** そうですか
- 1 点も積もり積もれば山となる． **山田のコメント：** のか?
- 数学者リーマンはリーマンショックと同じ家系ではないのですね． **山田のコメント：** リーマン・ブラザーズは Lehman Bros. 数学者リーマンは B. Riemann.

質問と回答

質問： コーシー列は，無限級数の収束条件のために説明されてますよね? 無限級数の各項がコーシー列であることは全く無関係ですか． **お答え：**この文脈ではそうです．もちろん他にも使いでがあります．無限級数が収束するなら各項からなる数列は 0 に収束するので自動的にコーシー列ですね．

質問： すべて項が有理数となるコーシー列で，無理数に収束するものは例えば $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}+1} \to \sqrt{2}$ のように収束値（原文ママ：極限値のことか?）が無理数となるよに無理数を連分数にした数列のことですか?

お答え： 「例えば」がついているので一概にまちがいとは言えませんが，「. . . するものはこういう数列だ」というとそれ以外のものを排除しています．「こういう数列は. . . をみたす」という言い方をすべきです．もちろん無理数の連分数展開以外にも例はたくさんあります：0.1, 0.101, 0.101001, 0.1010010001,. . . ; 2, $2 + \frac{1}{2}$, $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!}$,. . . .

質問： 9-3 の $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \alpha$ についてですが，$\sum a_n$ 条件収束であるとき $\alpha = 1$ となるのですか．

お答え： 極限値 α が存在するならそうです．$\alpha < 1$ なら絶対収束，$\alpha > 1$ なら発散なので．

質問： 問題 9-3 は「$r=1$ のときは正数 c が存在して $\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|-1\right)=-1-c$ をみたす場合級数は絶対収束する」ということになるのでしょうか．ダランベールの公式が使えない場合ラーベの収束判定法をつかうらしいですが，ラーベの収束判定法について教えて下さい．

お答え： 使えない場合で (1) 極限が存在しない場合，この場合はコーシー・アダマールを使う．(2) 極限が存在して 1 のとき，ご質問の十分条件（ラーベの判定法；等比級数ではなく $\sum n^p$ と比較することで証明できる）．

質問： 補題 9.4 について，必要性の証明を読むと (1) は $a_n \leqq \alpha+\varepsilon$ ではなく $a_n<\alpha+\varepsilon$，(2) は $\alpha-\varepsilon<a_m$ ではなく $\alpha_N^+-\varepsilon<a_m$ となるように思いました．どうして講義ノートのようになるのか教えて下さい．

お答え： (1): どちらの不等号を用いても同値な条件になるのですが，証明や他で使っているところをみると "$<$" の方が座りがよいので訂正しましょう．(2): $\{a_n^+\}$ は単調非増加で α に収束するのだから $\alpha \leqq a_N^+$.

質問： $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ の定義は (1) $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}$ s. t. $n>N \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$ と (2) $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}$ s. t. $n\geqq N \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$ のどちらが適切ですか． **お答え：**番号 N を一つずらせばよいので，同値．

質問： ゼータ関数について詳しく知りたいのですが $\zeta(-1)=-\frac{1}{12}$ はどうやって計算すればよいのですか．

お答え： 「リーマン・ゼータ関数」，「関数等式」でぐぐってみましょう．

質問： リーマン・ゼータ関数の話に関して，例えば $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots$ $(|x|<1)$，$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2(1+\frac{x-1}{2})}=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2-\dots\right\}$ $(-1<x<3)$ となり，両式に $x=2$ を代入してしまうと，$1-2+4-8+\dots=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\dots$ という間違った等式が出てきます．$1+2+\dots=-\frac{1}{12}$ という等式もこのような操作で出てきたというならば，ある意味どころかあきらかに間違っていると思うのですが．

お答え： こんな操作ではありません．講義で説明したように $1+2+\dots=-\frac{1}{12}$ は誤りで $\zeta(-1)=-\frac{1}{12}$ が正しい．$\zeta(s)=\sum 1/n^s$（$\mathrm{Re}\, s>1$）を拡大解釈して $\zeta(-1)=$ "$1+2+\dots$" と書くと，気分としてはこういう式になる．

質問： $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ について，どうして $n^s=n^u e^{i\log n}$ とすると $s\neq 1$ に拡張できるのですか（どうして $s=1$ は駄目なんですか） **お答え：**二つの異なることを勝手につなぎあわせているようです．(1) 複素数 $s=u+iv$ (u, v は実数）に対して $n^s=n^u e^{iv\log n}$ と定義する．(2) $\sum 1/(n^s)$ は $s=1$ のとき発散する．

質問： ずいぶん前の話になりますが，「$\{a_k\}$ が α に収束 $\Leftrightarrow$ 任意の正の数 ε に対して次をみたす番号 N が存在する：$n\geqq N$ となる任意の n について $|a_n-\alpha|<\varepsilon$」がありますが，実際使うのは 0 に近いところの ε だけですから，例えば，0 に収束する数列 $\{p_n\}>0$ を用いて「任意の正の数 ε」の部分を「任意の自然数 m に対する p_m」と置き換えても良いのでしょうか．こうするとより広い定義になっていると思います．

お答え： 「数列 $\{p_m\}$ が 0 に収束する」というのはどうやって定義しますか?

質問： プリントの冪級数を見る限りだと $x=0$ 付近のテーラー展開は冪級数に入ると思うのですが，$x=a$ 付近 $(a\neq 0)$ のテーラー展開は冪級数にはいらないのでしょうか?

お答え： 「a を中心とする冪級数」 講義ノート 73 ページ．

質問： $\limsup_{n\to\infty} a_n$ のように $\liminf_{n\to\infty} a_n$ のようなものはありますか． **お答え：**講義ノート 65 ページ．

質問： lim と sup を使うときは「$\limsup_{n\to\infty}$」と書くのですか? （「$\lim_{n\to\infty}\sup$」ではなく）

お答え： "lim と sup を使う" でなく "lim sup（一語）を使う" です．limsup と書く人もいます．

質問： 条件収束する級数は好きな値に収束さえられるそうですが，逆に絶対収束する級数は（項を入れ替えても）一定の値に収束するのでしょうか． **お答え：**「逆に」の使い方が変ですが，結論は講義ノート 71 ページ．

質問： 条件収束の定義がよくわからないのでうが，今，理解を深めた方がいいのでしょうか?

質問： 条件収束についてですが，定理 9.14 から絶対収束する級数は収束するとありますが，収束する級数は絶対収束するとはいえなく，この級数のことを条件収束するという理解でよいですか?

お答え： 深めるとか，理解とかの問題でなく，講義ノート 71 ページに書いてある．

質問： 有界が結局よくわからないままきてしまっているのですが，一般的な定義をもう一度確認してもよいでしょうか．

お答え： ぜひ確認してください．講義ノート 37 ページおよび 50 ページ．

質問： 補題 9.1 (2) 「数列 $\{a_n\}$ が上に有界あらば，$\{a_n^+\}$ は各項が実数の単調非増加数列」は単調非減少ではないでしょうか．(以下略)． **お答え：**違います．$a_n=\frac{1}{n}$ で確かめてご覧なさい．$a_1^+=1, a_2^+=\frac{1}{2}, \dots$.

質問： 多変数関数のテイラー展開は授業で扱いますか． **お答え：**1 月にやります．

質問： Cauchy 列の収束と d'Alembert の $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \overset{n\to\infty}{\to} 1$ と単調非減少数列の収束 $\Leftrightarrow$ 上に有界の同値を示すにはどうすればよいですか? **お答え：**意味が分かりません．"d'Alembert の" とは級数の絶対収束性に関する d'Alembert の判定条件のことでしょうか．そうだとしたらここに書いてあることは間違いです．