微分積分学第二 B 中間試験 〔問題 1〕

注意事項
- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読み, 理解できるように書いてください.
- 裏面・計算用紙は下書き, 計算などに使用できますが, 採点の対象とはしません.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は 1 月 14 日の講義の際に返却する予定です. それ以降は**数学事務室 (本館 3 階 332B)** で受け取って下さい.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は, 2013 年 1 月 21 日までに山田まで電子メイルでお申し出いただくか, 1 月 21 日の授業終了後にご連絡ください. なお, 管理の都合上, 上記期日以降のクレイムは, **たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**.

指定用紙のみ持込可

定理群:

定理 A 関数 f が a と $a+h$ を含む区間で C^{n+1}-級ならば

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k+R_{n+1}(h),\qquad R_{n+1}(h)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1},\qquad 0<\theta<1$$

を満たす θ が存在する. とくに $h\to 0$ のとき $R_{n+1}(h)=o(h^n)$ である.

定理 B 絶対収束する級数は収束する.

定理 C 数列 $\{a_n\,;\,n=0,1,2,\dots\}$ が単調非増加で $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ が成り立つならば $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ は収束する.

以下, 次の冪級数を考える:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \qquad (\heartsuit)$$

定理 D 冪級数 ($\heartsuit$) の収束半径 r は $1/\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ である.

定理 E 冪級数 ($\heartsuit$) の収束半径 r が正ならば, 関数 f は開区間 $(-r,r)$ で連続である.

定理 F 定理 E の状況で, $\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n$ が成り立つ. とくに右辺の冪級数の収束半径は r である.

定理 G 定理 E の状況で f は $(-r,r)$ で微分可能で $\frac{d}{dx}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ が成り立つ. 右辺の収束半径は r である.

定理 H 定理 E の状況で, とくに $r\neq+\infty$ であるとき, ($\heartsuit$) の右辺 に $x=r$ ($x=-r$) を代入した級数が収束するならば $\lim_{x\to r-0}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n$ $\left(\lim_{x\to -r+0}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-r)^n\right)$ が成り立つ.

問題 A 文中の $\boxed{1}$ ∼ $\boxed{12}$ に最もよく充てはまる数・式を入れ, 問題 **a** に答えなさい. [30 点]

関数 $f(x)=\tan x$ に対して $f(0.1)$ の近似値を求める：$f(x)$ に対して, $a=0$, $h=0.1$, $n=4$ として定理 A を適用すれば,

$$f(0.1)=\boxed{1}+R_5\qquad R_5=\boxed{2}\qquad (0<\theta<1)$$

を満たす θ が存在する[1]. ここで, $\boxed{2}$ は不等式 $_{\mathbf{a}}\underline{\boxed{3}<R_5<\boxed{4}}$ をみたす[1]. したがって, $f(0.1)=\boxed{5}.\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}\boxed{9}\boxed{10}\boxed{11}\boxed{12}\dots$[2]である.

問題 a 下線 **a** の不等式を導きなさい (たとえば $0.1<\frac{\pi}{6}$ という事実は用いてよい) .

[1] $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ には小数を入れる. 10 の指数を用いた表示でもよい.
[2] $\boxed{5}$–$\boxed{12}$ には, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 または × を入れる. 上の推論から, その桁の数字が確定する場合は, その数字を, そうでない場合は × を入れよ.

問題 B 次の文中の $\boxed{1}$～$\boxed{17}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい． [30 点]

二つの関数

$$f(x) = 3(\tan^{-1} x - \sin x) + x^3 g(x) = 2x(\cosh x - 1) - x^3$$

に $x = 0$ のまわりでテイラーの定理を適用すると，

$$f(x) = \boxed{1} + \boxed{2}x + \boxed{3}x^2 + \boxed{4}x^3 + \boxed{5}x^4 + \boxed{6}x^5 + \boxed{7}x^6 + o(x^{\boxed{8}}) \quad (x \to 0)$$

$$g(x) = \boxed{9} + \boxed{10}x + \boxed{11}x^2 + \boxed{12}x^3 + \boxed{13}x^4 + \boxed{14}x^5 + \boxed{15}x^6 + o(x^{\boxed{16}}) \quad (x \to 0)$$

が成り立つ．ただし o はランダウの記号である．したがって，

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\tan x - 3x - x^3}{6\sinh x - 6x - x^3} = \boxed{17}$$

である．問題に誤りあり．解答欄参照

問題 C 次の文中の $\boxed{1}$～$\boxed{8}$ にもっともよく充てはまる数・式・定理 (この問題用紙の冒頭の定理群の記号 A～H) を入れなさい．さらに，下線 **a** の部分の理由を述べなさい． [30 点]

等式

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^{\infty} \frac{u}{e^u - 1}\, du$$

であることを示そう．いま，

$$(**) \qquad f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$$

とおくと，右辺の級数の収束半径 r は $r = \boxed{1}$ である．したがって，定理$\boxed{2}$ から，区間 $\boxed{3}$ で $f'(x) = \dfrac{d}{dx} f(x) = \boxed{4}$ と冪級数表示できる．とくに $xf'(x) = \boxed{5}$ と，対数関数を用いて表すことができる．ここで， $x = r$ のとき，$(**)$ の右辺の級数は$_{\mathbf{a}}$<u>収束する</u>ので，定理$\boxed{6}$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = f(1) = \lim_{x\to 1-0} \int_0^x \boxed{7}\, dt$$

となる．とくに右辺の積分で $u = \boxed{8}$ とおけば，$(*)$ が成り立つことがわかる．

問題 a 下線 **a** の部分の理由を述べなさい．

問題 b 下線 **b** の部分で二つの定理をどう用いて結論を得るかを述べなさい．該当なし．申し訳ない

問題 D 数列 $\{a_n\}$ が実数 α に収束しているとする．このとき次の問いに答えなさい． [10 点]

(1) ある番号 N_1 で次をみたすものが存在することを示しなさい：$n \geqq N_1$ をみたす全ての番号 n に対して $|a_n| \leqq |\alpha| + 1$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n)^2 = \alpha^2$ であることを，極限の定義から直接証明しなさい．

問題 E [0 点] この授業に関するご意見，ご希望，ご誹謗，ご中傷などありましたらお書きください．回答の内容が成績に影響することは一切ありません．

おつかれさまでした ♡

微分積分学第二 B 中間試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：1,2:各 5 点,3–4:5 点, 5–12:10 点，問題 a: 5 点

1	2
$0.100333\ldots$	$\dfrac{1}{15}\bigl(2+15\tan^2(0.1\theta)+15\tan^4(0.1\theta)\bigr)\bigl(1+\tan^2(0.1\theta)\bigr)10^{-5}$

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10^{-6}	10^{-5}	0	1	0	0	3	×	×	×

問題 a

関数 $f(t) := (2+15t+15t^2)(1+t)$ は $t>0$ で単調増加である．実際，$t>0$ の範囲で $f'(t)=45t^2+60t+17>0$．ここで $0<\theta<1$ に対して

$$0=\tan^2 0<\tan^2(0.1\theta)<\tan^2(0.1)<\tan^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}$$

なので，

$$R_5>\frac{1}{15}f(0)10^{-5}=\frac{2}{15}10^{-5}>\frac{2}{20}10^{-5}=10^{-6}$$
$$R_5<\frac{1}{15}f\left(\frac{1}{3}\right))10^{-5}=\frac{104}{135}10^{-5}<10^{-5}.$$

計算スペース（採点の対象にはしません）

- 3, 4 の評価に従って 5–12 の正解は変わります．3, 4 から結論できない値は，真の値に近くても不正解.
- 問題 a: “およそ等しい” ということから “不等号” は結論できません．この例よりもずっと高い精度で求めてくださった方が多いようです.
- 「$x>0$ のとき $\tan x>x$」は常識だと思いますが，いかがでしょう.

学籍番号	氏　名

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 中間試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：1–7:5 点, 8: 5 点, 9–15:5 点, 16: 5 点, 17:10 点

1 0	2 0	3 0	4 $\frac{1}{2}$	5 0	6 $\frac{23}{40}$	7 0	8 6
9 0	10 0	11 0	12 0	13 0	14 $\frac{1}{12}$	15 0	16 6
17 8							

計算スペース（採点の対象にはしません）

- 問題に誤植がありました．申し訳ありません．意図していた問題は
$$f(x) = 6(\tan^{-1} x - \sin x) + x^3, \qquad g(x) = 2x(\cosh x - 1) - x^3, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{を求める}$$
というものです．
- 問題に書いてあるとおりに計算すると，上記のようになります．これを正解として採点しています．
- $\boxed{17}$ は $f(x)/g(x)$ の極限のつもりでしたが，問題では違った極限を要求していました．これを $f(x)/g(x)$ の極限として計算した方も正解としています.（ちなみに $+\infty$ になります）
- 意図した問題通りだと $\boxed{17}$ は 69/5 となります．確かめてみてください．

学籍番号	氏　名

微分積分学第二 B 中間試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄 配点：1–4: 10 点; 5: 5 点; 6–8: 10 点; 問題 a,: 5 点

1	2	3	4	5	6
1	G	$(-1,1)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$	$-\log(1-x)$	H

7	8
$\dfrac{-\log(1-t)}{t}$	$\log(1-t)$

問題 a

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ とおくと $\{S_n\}$ は単調非減少．さらに

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^2}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{(k+1)^2}\leqq 1+\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^2}=1+\int_1^n\frac{dx}{x^2}=2-\frac{1}{n}\leqq 2$$

なので $\{S_n\}$ は上に有界．したがって定理 D より $\{S_n\}$ は収束する．

- 問題 b は該当するものがありませんでした．解答欄もなし．過去問のコピペによるミスです．申し訳ありません．
- $\boxed{1}$–$\boxed{4}$ はうち 3 個正解で 5 点にしています．
- $\boxed{3}$: 少なくとも，この文から結論できる区間は $[-1,1]$ ではありません．
- $\boxed{4}$: 和を取る範囲に注意．
- 問題 a:
  - 存在するかどうかわからないもの (それが存在することを示したい) を直接比較しているのは不正解．
  - たとえば，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\dots$ なんていう式があったら不正解
  - 収束半径が 1 だから，という議論は無効
  - もちろん $1/n^2\to 0$ だから，というのは間違い
  - $1/n^2$ が単調で有界だから，というのはもちろん間違い．そんな議論ができるなら $\sum(1/n)$ が収束してしまう
  - $\sum 1/n^s$ の収束条件を使った方を正解にしようとおもったのですが，和の範囲が $n=0$ からだったので不正解
  - 定理 C を用いた方は $a_n\geqq 0$ の仮定あるいは $(-1)^n$ を忘れていませんか?
  - コーシー・アダマールの条件は使えません（上極限が 1）
  - $\frac{1}{n^2}\leqq\frac{1}{2^n}$ は成り立ちません．

学籍番号	氏　名

微分積分学第二 B 中間試験 〔解答用紙 4〕

問題 D の解答欄 配点：各 5 点

(1)

数列 $\{a_n\}$ は α に収束するから，次をみたす番号 N_1 が存在する（極限の定義で $\varepsilon=1$ とする）:「$n \geqq N_1$ ならば $|a_n-\alpha|<1$.」
一方，$|a_n-\alpha| \geqq \bigl||a_n|-|\alpha|\bigr|$ なので，$n \geqq N_1$ をみたす n に対して

$$|\alpha|-1<|a_n|<|\alpha|+1$$

が成り立つ.

(2)

正の数 ε を任意にとる．数列 $\{a_n\}$ は α に収束するから，この ε に対して（極限の定義で ε のかわりに $\varepsilon/(2|\alpha|+1)$ を考える）次を満たす番号 N_2 が存在する：
「$n \geqq N_2$ ならば $|a_n-\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{2|\alpha|+1}$.」
このとき $N=\max\{N_1,N_2\}$ （N_1 は (1) でとった N_1）とすると，$n \geqq N$ をみたす任意の n に対して

$$\begin{aligned}|a_n^2-\alpha^2| &= |(a_n-\alpha)(a_n+\alpha)| = |a_n-\alpha|\cdot|a_n+\alpha| \leqq |a_n-\alpha|\cdot\bigl(|a_n|+|\alpha|\bigr)\\ &\leqq |a_n-\alpha|\cdot\bigl(|\alpha|+1+|\alpha|\bigr) = |a_n-\alpha|\cdot\bigl(2|\alpha|+1\bigr) < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|+1}(2|\alpha|+1)=\varepsilon.\end{aligned}$$

計算スペース（採点の対象にはしません）

- 「題意」という語を使った方が数名．前期にお願いしましたが,「題意」という語をどうしても使いたいときは，その意味を付記すること．今回は，付記された方はいらっしゃいませんでした．不正解としています.
- ε を n に依存する値にとっている人がいます．これは n によって変わってはいけない量.
- 極限の定義は「十分小さい」「無限に大きい」という語をさけるように作られています（という説明をしましたね）．ですから，そのような語を使っている方は不正解.
- (2) で
$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}b_n\right)$$
は極限の**定義**ではありません.「極限の定義より」といってこれを使った方は「定義」という語の意味を理解していないと思われます.

学籍番号	氏　名

2014 年 1 月 7 日 10 時 45 分 ∼12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 中間試験 〔解答用紙 5〕

この用紙には，問題 E への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 E この授業に関するご意見，ご希望，ご誹謗，ご中傷などありましたらお書きください．回答の内容が成績に影響することは一切ありません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- 2013 年度入学の方は，学籍番号のうち “13_” を除いた番号の席に着席してください．
- それ以外の方は，ご自分の名前のある席に着席してください．
- **座席表に学籍番号・氏名がない方は監督者まで申し出てください**．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 5 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
  提出物の学籍番号を間違えた方がいらっしゃいます．くれぐれも間違えないように．
- 解答用紙 5 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．6 枚揃っていない答案は採点いたしません．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，解答用紙 5，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を各列の黒板に向かって**右端**から左，**左端**まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最前列の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号	氏　名