2014 年 1 月 21 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 13

お知らせ

- 【協力のお願い】前期もご協力いただきました「授業評価」ですが，今学期より web 上で行うこととなりました．お手数をおかけして申し訳ありませんが「東工大ポータル」に入って「授業評価 Course Evaluation」のページよりご回答お願いいたします．

前回までの訂正

- 講義ノート 81 ページ 5 行目：与えれた ⇒ 与えられた
- 講義ノート 82 ページ 9 行目：

$$= (1-x)\left(\sum_{n=0}^{N-1}(\sigma_n - X)x^n - \sum_{n=0}^{N-1} Xx^n\right) + \sigma_N x^N \quad \Rightarrow \quad = (1-x)\left(\sum_{n=0}^{N-1}(\sigma_n - X)x^n + \sum_{n=0}^{N-1} Xx^n\right) + \sigma_N x^N$$

- 講義ノート 82 ページ 11 行目：

$$+(1-x)X\sum_{n=0}^{N-1} x^N + \sigma_N x^N \qquad \Rightarrow \qquad +(1-x)X\sum_{n=0}^{N-1} x^n + \sigma_N x^N$$

- 講義ノート 85 ページ 2 行目：$f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$
- 講義ノート 85 ページ 8 行目：存在しない ⇒ 成立しない

授業に関する御意見

- 言われてみると，“題意” より. . . ，“題意” が示された，なんて使い方をしていますね．
  山田のコメント： そうなんですよ．だから “題意” を使うな，って前期に言ったように思いますが．
- x^3 と $g(x)$ の間には間隔を空けて下さい. . . 期末では察しの悪い自分みたいな人のためよろしくお願いします．
  山田のコメント： もうしわけありません．完全にこちらのミスでした．
- テストの平均値を教えて下さい．　**山田のコメント：** なんで?
- 定期試験の持ち込み用紙について「類似の用紙」の持ち込みを禁止するなら不正コピー防止の模様が入った紙を使ってみてはいかがですか?
  山田のコメント： 時間と費用の問題で，やりません．「中間試験の答案がこちらに残っている方が何かを持ち込んだら自動的に不正」ということですね．
- 中間試験に向けて定理だけ書いて失敗しました．　**山田のコメント：** そうでしょうそうでしょう．

質問と回答

質問： $f(a+h) > f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2$ と説明なさっていましたが，$R_3(a) > 0$ とは限らないのではないでしょうか．　**お答え：**不等号はおかしい．“およそ等しい” と述べたはず．$R_3(a)$ は $R_3(h)$．$|h|$ を小さい範囲に限ると，この $R_3(h)$ が $f''(a)h^2/2$ の符号を替えない程度に小さい，というのが講義ノート 86 ページに書いてあること．

質問： 定理 11.6 を説明するのに用いた「いい加減バージョン」の説明は証明として使えないのですか．

お答え： このままでは使えません．“$R_3(h)$ は h が十分小さければ $\frac{1}{2}mh^2$ より小さいので” 以降を次のように書き換えればよい．

$R_3(h)/h^2 \to 0$ $(h \to 0)$ だから，次のような正の数 δ が存在する：$|h| < \delta$ をみたす任意の h に対して $|R_3(h)/h^2| < m/2$. このとき，$|h| < \delta$ ならば

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}mh^2 + R_3(h) \geqq \frac{1}{2}mh^2 - |R_3(h)| = \frac{1}{2}mh^2 - \left|\frac{R_3(h)}{h^2}\right| h^2 > \frac{1}{2}mh^2 - \frac{1}{2}mh^2 = 0.$$

質問： 講義資料上で確認できなかったためこちらで確認しますが，一変数関数 $f(x)$ において $x = a$ が極小値 (極大値) かどうかを調べるとき $f^{(n)}(a) \neq 0$ である最小の正の整数 n において

- n が奇数なら極大値でも極小値でもない.
- n が偶数ならば，$f^{(n)}(a) > 0$ ならば $x = a$ は極小値，$f^{(n)}(a) < 0$ ならば $x = a$ は極大値

ということで正しいでしょうか．変態な例などは別だと思いますが.

お答え： 正しいです．ただし「$x = a$ は極小値」は変ですね.「$f(x)$ は $x = a$ で極小値をとる」ではないでしょうか.

質問： 二階微分の増減について顔文字のような絵を書いて高校生を騙すにはこれで十分とおっやってましたが，では高校生を騙さないとすれば，どういう言い方（描き方）をしますか.

お答え： 「二階微分の増減」と言わず「極値と二次微分係数の関係」という．その上でで正しく定理のステートメントを書く.

質問： 今回極値の判定条件を講義で扱いましたが，こちらは極値の候補を調べるだけでなく，増減を調べる方法は，変数を動かして考えなければならない，ということですか．すると講義で扱ったような方法でのみ多変数関数の極値がわかるといういことですか?

お答え： 前半の「こちら」が何をさしているか分からないので意味がわかりません.「講義で扱った方法のみで」かどうかはわかりませんが，講義で扱った方法は多変数に一般化しやすい.

質問： プリント p89 に関して 2 変数の開集合の式が円の方程式が類似しているようにみえますが 3 変数になったら球の方程式になるんですかね?

お答え： 日本語が変ですね．開集合の式ではないのでは? $\mathbb{R}^3$ の ε-近傍の定義式は球の内部を表す式になります.

質問： 問題 A は 0.10033XX がだめなのは，たとえば 8×10^{-6} $0.100333\dots + 0.000008 = 0.100341\dots$ というように 3 が 4 に繰り上がってしまうからということでいいのでしょうか.

お答え： そういうことがおきうるので $0.10033\dots < y < 0.100341$ から y の小数第 5 位の数字がきまらない.

質問： 中間試験問題 C の解説で，対数関数が $xf'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n$ を表すときに，はじめに $\log(1+x)$ のテイラー展開を引き合いにだしましたが，そこからどのように $f'(x) = -\log(1-x)/x$ につなげたのかよく分かりませんでした.

お答え： $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ なので，$\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-x)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ である.

質問： 問題 C の答え “$-\log(1-x)$” を思いつくのは $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ から連想する以外に何か方法はありますか? 自分は残念ながら頭にマイナスを付ける考えにいたらなかったですが.

お答え： もう一度項別微分すれば等比級数が出てくるのでそれを積分する.

質問： 問題 B の関数がつながっていて $f(x) = \dots x^3 g(x) \dots$ と言っているように見えました.

お答え： ごめんなさい．答案にそう指摘してくださっている方もいらっしゃいました.

質問： アーベルの定理の証明のようなややこしい証明は見て分かればいいですか．自分でできたほうがいいですか.

お答え： 自分でできなくてもよいと思います．むしろこの定理の “意味” を理解していただければよいです.

質問： 5 枚でスキャンしているのであれば，持ち込み用紙も集めるのはじゃまじゃないですか.

お答え： 不正防止．あとは「笑う」ため.

質問： 中間試験問題 B の解答の 4 と 6 と 17 の色が青い部分がありましたがどのような意味があるのですか.

お答え： 最初に公表した解答と違っている部分.

質問： テストの得点の中央値を教えて下さい． **お答え：** なぜ (35)

質問： 「ランダウの大文字の O 記号」はコンピュータサイエンス入門で

$$g \in O(f) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{g(n)}{f(n)}\right| = c \qquad (c \text{ は定数})$$

という定義の紹介がありましたが，この講義でもこの定義でいいですか.

お答え： それでよいです（この場合は $n \to \infty$ ですね）．この講義では $\overline{\lim}$ の代わりに $\limsup$ を用いています.