2014 年 1 月 28 日

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 14

お知らせ

- 今回が最終回です．**ご聴講ありがとうございました．** 皆様のご意見・質問は大変役に立ちました．
- 2 月 4 日に予定されている補講は「質問・無駄話」のための時間です．お暇ならお立ち寄りください．
- 【協力のお願い】今学期より「授業評価」 は web 上で行なっています．お手数をおかけしますが，「東工大ポータル」に入って「授業評価 Course Evaluation」のページよりご回答お願いいたします．
- 【定期試験のお知らせ】休日で申し訳ありませんが，定期試験は **2 月 11 日**に行います．詳細は中間試験答案につけた「定期試験予告」にて．まだ答案を受け取っていない方は数学事務室（本館 3 階 H332B）にて返却しております．なお，当日は**休日ダイヤ**に気をつけて遅刻しないようにおいでください．

前回までの訂正

- 講義で扱った，2 変数関数の極値判定条件の証明の式変形で
$$A\left[\left(h+\frac{B}{A}k\right)^2+A^2(AC-B^2)k^2\right] \qquad \Rightarrow \qquad A\left[\left(h+\frac{B}{A}k\right)^2+\frac{1}{A^2}(AC-B^2)k^2\right]$$
- 講義資料 13, 2 ページ, 9 行目：おっやっていましたが ⇒ おっしゃっていましたが
- 講義資料 13, 2 ページ, 12 行目：その上でで ⇒ その上で
- 講義ノート 90 ページ 3 行目：2 次の項までをで近似 ⇒ 2 次の項までで近似
- 講義ノート 91 ページ 3 行目：矢印前の最後の $r\cos t \Rightarrow r\cos^3 t$.

授業に関する御意見

- ここに意見を書くのは久しぶりな気がします．発言できる場があるというのはいいことですね．
  山田のコメント： なかなか授業中は発言できない方も書いていただくといろいろな意見があってこちらも勉強になります．
- この授業ももうすぐ終わりだなんて・・・そんな・・・・・・ **山田のコメント：** もう一度，やる？
- もしかして：最後の質問用紙 **山田のコメント：** もしかして：今年度 最後の質問用紙.
- ごめんなさい ¡¡ 提出するものなのにおれてしまいました¡¡ 申し訳ありません **山田のコメント：** はい．今度は気をつけてね.

質問と回答

質問： 講義で説明なさっていたのならお許し下さい．定理 12.5 で $f_{xx}(a,b)=0$ のときはどうするべきなのでしょうか．f_{yy} で考えるべきでしょうか．それとも，何か別の事実がわかるのでしょうか.

お答え： (1) 証明でしょうか．講義では補題 12.6 の証明を $A\neq 0$ の場合にしか説明していませんが，講義ノートのような状況ですので $A=0$ の場合も特別視しなくて大丈夫です．(2) ステートメント（主張の方）でしょうか．定理の仮定には $f_{xx}(a,b)\neq 0$ という条件は書いてないわけで，この定理を適用する際は $f_{xx}(a,b)$ が 0 か 0 でないかは考えなくてよいです.

質問： $f(x,y)=x^3-xy+y^3$ の極値を考えていたとき，$(x,y)=(0,0)$ のときは $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ で $0^2-(-1)^2<0$ だから極大と極小を同時に... とおっしゃっていましたが，そもそも $A=f_{xx}=0$ のときは $AC-B^2$ による判定をしてはいけないのではないでしょうか? ($A\neq 0$ で話を進めていたから).

お答え： 「極大と極小を同時」ではないですね.「極値をとらない」です．そう言ったはずです．これは定理 12.5 を使った判定で，定理 12.5 では $A \neq 0$ などという仮定はしていないはずです．講義で $A \neq 0$ で考察したのは，$A \neq 0$ の場合と $A = 0$ の場合に分けて，$A = 0$ の場合の考察を省略しただけです.

質問： 定理 12.5 で $A = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$ としても定理は成り立ちますか.

お答え： 成り立ちます．証明：x と y の役割を入れ替える.

質問： 1 次の項は $\frac{\partial f}{\partial(x,y)}\boldsymbol{h}$, 2 次の項は ${}^t\boldsymbol{h}\frac{\partial(f_x,f_y)}{\partial(x,y)}\boldsymbol{h}$ $\boldsymbol{h} = \binom{h}{k}$ と書けますが，n 次の項はどう計算すればよいのですか?

お答え： $F(t) = f(a + th, b + tk)$ の高階微分を頑張って計算すればよいが，2 変数なら $\displaystyle\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{\partial^n f(a,b)}{\partial x^l \partial y^{n-l}}h^l k^{n-l}$ です．ただし $\binom{n}{l}$ は二項係数．ところで，一般に $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ は，ヤコビ行列式 Jacobian を表すことが多いようです：

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = u_x v_y - u_y v_x. \qquad \text{すると} \qquad \frac{\partial(f_x,f_y)}{\partial(x,y)} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx}$$

となり，ご質問の文脈に合わないように思います．どこかで使われている記号ですか?

質問： $\Delta := \det \operatorname{Hess} f(a, b)$ という表し方は一般的なのですか? **お答え：**どの部分がでしょう.

質問： C^∞-級であることを C^∞ と表記してもよいのですか? （黒板に C^∞ とのみ書かれていたので）

お答え： 板書は略記です．そこで述べた言葉との組で一つの意味をなすと思って下さい.

質問： $f(x, y)$ の極値は xyz 座標で考えると z 方向の極値ということなのでしょうか?

お答え： (x, y) を動かしたときの $f(x, y)$ の値がその近くで最大となること．むしろ，ご質問の「z 方向の極値」という言葉の意味がわかりません．まず最初に「グラフを考える」ということでしょうか？

質問： 何故実数を成分とする対称行列 A に対して，直交行列 P で対角化可能なのですか? また，複素数を成分とする対称行列の場合，直交行列で対角化可能ですか?

お答え： 前半：これが線形代数第二の最後に扱うテーマであるはず．後半：たとえば $\left(\begin{smallmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$ が反例．これは対称行列だが（いかなる行列によっても）対角化できない.

質問： 講義ノート 91 ページ (12.3) のように $(h, k)\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ と行ベクトルと行列の積の形が見慣れません. $(h, k)\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ はダメでしょうか.

お答え： $(1, 2)$ 行列と $(2, 2)$ 行列の積ですから，きちんと定義できて答えは $(1, 2)$ 行列になります．一般に，行列の積は (m, n) 行列と (n, k) 行列（この順序）に対して定義され，その答えは (m, k) 行列になるのでは?

質問： p99 の例 13.6 で $\dot{\boldsymbol{x}} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -2\gamma \end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x}$ とありますが，$\dot{\boldsymbol{x}} = \left(\begin{smallmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ \dot{x} \end{smallmatrix}\right)$ として $\dot{\boldsymbol{x}} = (-\alpha, -2\gamma)\boldsymbol{x}$ ではいけないのですか? **お答え：**行列の積の定義は? 左辺は $(1, 2)$-行列，右辺はスカラになっていますが.

質問： P96 の 12-3 について "• $f_x(x, y) = 0$, $f_y(x, y) = 0$ となる (x, y) を全て求めなさい. <u>(ここで虚数解は考えない．なぜか)</u>" 下線についてですが，ここに関して虚数解は一切考虚（たぶん考慮のこと）のは何故かを考察しないといけないのですか? **お答え：**そうです．そしてそれは授業で説明しましたね.

質問： 問題 12-5: $f_x = f_y = 0$ となる (x, y) は $(0, 0)$ の他に 2 点あるとのことでしたが，$(0, -\frac{3}{4})$, $(\frac{3}{4}, 0)$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ の 3 点あり，そのうち $(0, -\frac{3}{4})$ と $(\frac{3}{4}, 0)$ では極小値，$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ では極値をとらないと導きましたが違っているでしょうか. **お答え：**ごめんなさい．2 でなく 3 でしたね．正解です.

質問： 問題 12-5 で $f(x, 0) = x^4 - x^3$ が $x = 0$ で極値をとらないのは分かるのですが，「$(x, y) = (0, 0)$ の近くで $f(x, y) > f(0, 0)$ となる点も $f(x, y) < f(0, 0)$ となる点もある」といえる根拠が明確には分からなかったのですが，なぜいえるのですか.

お答え： まず $f(x, 0) < 0$ ($x < 0$ のとき)，$f(x, 0) > 0$ ($0 < x < 1$ のとき)．すると，たとえば，$(0, 0)$ からの距離が 0.1 未満の点 (x, y) で (1) $f(x, y) < 0$ となるものが存在する．(2) $f(x, y) > 0$ となるものが存在する．実際 (1) $(-0.05, 0)$，(2) $(0.05, 0)$ は条件をみたす．0.1 を任意の正の数で置き換えても同様だからすなわち $(0, 0)$ にいくらでも近いところに $f(x, y) > 0$ となる点，$f(x, y) < 0$ となる点がある.

質問： 前回の質問の訂正（講義資料 13, p.2 上から 3 つ目の質問）（質問用紙の文字がきたないせいですが）「極値の候補を調べるだけでなく」の「な」→「よ」，の上で再質問します：極値を調べる方法のうち，講義で扱った方法では候補の点での導関数などを調べるだけでよく，一方の増減を調べる方法は変数を連続的に（動かして）考えなくてはいけないということですか.

お答え： すみません．読み違えていたのですね．で，そうです．ところで「候補の点での導関数」は「候補の点での微分係数」と言う方が適切と思います.