2014 年 2 月 11 日 09 時 00 分 ∼10 時 30 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 定期試験 〔問題 1〕

注意事項
- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解できるように書いてください.
- 計算や下書きにはは余白や裏面を使用してください（採点の対象とはしません）.
- 試験終了後は，**解答用紙**と**持込用紙**を回収します．問題は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません．問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案はおそくとも **2 月 17 日**には**数学事務室（本館 3 階 332B)** にて返却いたします.
- 採点に関する質問・クレイムなどは **2014 年 2 月 23 日**までに山田まで**電子メイル**にてお申し出ください．上記期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**．ご了承下さい．また，返却答案を受け取らない方はクレイムをつける権利がありません.

指定用紙のみ持込可

定理群:

定理 A 関数 f が a と $a+h$ を含む区間で C^{n+1}-級ならば

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k+R_{n+1}(h),\qquad R_{n+1}(h)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1},\qquad 0<\theta<1$$

を満たす θ が存在する．とくに $h\to 0$ のとき $R_{n+1}(h)=o(h^n)$ である.

定理 B 冪級数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径は $1/\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ である.

定理 C 絶対収束する級数は収束する.

定理 D 上に有界な単調非減少数列は収束する.

定理 E 定理 B の冪級数の収束半径 r が正ならば，それが定める関数 f は開区間 $(-r,r)$ で連続である.

定理 F 定理 E の状況で，$\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n$ が成り立つ．とくに右辺の冪級数の収束半径は r である.

定理 G 定理 E の状況で f は $(-r,r)$ で微分可能で $\frac{d}{dx}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ が成り立つ．右辺の収束半径は r である.

定理 H 定理 E の状況で，とくに $r\neq+\infty$ であるとき，定理 B の冪級数の右辺 に $x=r$ $(x=-r)$ を代入した級数が収束するならば

$$\lim_{x\to r-0}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n\qquad\left(\lim_{x\to -r+0}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-r)^n\right)\qquad \text{が成り立つ.}$$

定理 I 負でない項からなる単調非増加数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束するならば $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^na_n$ は収束する.

定理 J 点 (a,b) を含む $\mathbb{R}^2$ の領域 D で C^∞-級であるような関数 f に対して $\Delta=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-\bigl(f_{xy}(a,b)\bigr)^2$ とおくとき，(1) f が (a,b) で極値をとるならば $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$. (2) $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ のとき，(2a) $\Delta<0$ ならば f は (a,b) で極値をとらない; (2b) $\Delta>0$ かつ $f_{xx}(a,b)>0$ なら f は (a,b) で極小値をとる.

問題 A 文中の $\boxed{1}$～$\boxed{6}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい．なお，該当する対象がない場合は，解答欄に × を記しなさい． [30 点]

$\mathbb{R}^2$ 全体で定義された関数

$$f(x,y)=x^2y^2+2x^3-2y^3+2x^2+2y^2$$

の偏導関数は $\boxed{1}$, 2 次偏導関数は $\boxed{2}$ である．とくに，f の偏微分係数がすべて 0 となるような点をすべて挙げると $(x,y)=\boxed{3}$ となる．とくに，$\boxed{3}$ で挙げた点のうち，点 $\boxed{4}$ では f は極小値をとり，点 $\boxed{5}$ では f は極大値をとる．さらに，点 $\boxed{6}$ では極値をとらない.

問題 B 次の文中の $\boxed{\ 1\ }$〜$\boxed{\ 19\ }$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい．[30 点]

二つの関数

$$f(x) = \tan x - x - ax^3, \qquad g(x) = \tan^{-1} x - x + ax^3 \qquad (a \text{ は定数})$$

に $x = 0$ のまわりでテイラーの定理を適用すると，

$$f(x) = \boxed{\ 1\ } + \boxed{\ 2\ }x + \boxed{\ 3\ }x^2 + \boxed{\ 4\ }x^3 + \boxed{\ 5\ }x^4 + \boxed{\ 6\ }x^5 + \boxed{\ 7\ }x^6 + o(x^{\boxed{8}}) \quad (x \to 0)$$

$$g(x) = \boxed{\ 9\ } + \boxed{\ 10\ }x + \boxed{\ 11\ }x^2 + \boxed{\ 12\ }x^3 + \boxed{\ 13\ }x^4 + \boxed{\ 14\ }x^5 + \boxed{\ 15\ }x^6 + o(x^{\boxed{16}}) \quad (x \to 0)$$

が成り立つ．ただし o はランダウの記号である．したがって，

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \boxed{\ 17\ } & (a \neq \boxed{\ 19\ } \text{ のとき}) \\ \boxed{\ 18\ } & (a = \boxed{\ 19\ } \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．

問題 C 次の文中の $\boxed{\ 1\ }$〜$\boxed{\ 11\ }$ にもっともよく充てはまる数・式・定理 (この問題用紙の冒頭の定理群の記号 A〜J) を入れなさい．さらに，下線 **a** を付した部分の理由を述べなさい．[30 点]

級数

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \ldots$$

の和を求めよう．いま，

$$(**) \qquad f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} x^{3n+2}$$

とおくと，この右辺の級数の$_{\mathbf{a}}$$\underline{\text{収束半径は } \boxed{\ 1\ }}$ である．したがって定理$\boxed{\ 2\ }$ から，区間 $\boxed{\ 3\ }$ で

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \boxed{\ 4\ } \qquad (\text{右辺は冪級数の形})$$

と冪級数表示できる．右辺の級数は等比級数だから，その和が具体的に $f'(x) = \boxed{\ 5\ }$ と表示されるが，$f(0) = \boxed{\ 6\ }$ だから，$\boxed{\ 5\ }$ を積分することによって $f(x) = \boxed{\ 7\ }$ が区間 $\boxed{\ 8\ }$ で成り立つ．

ここで，定理$\boxed{\ 9\ }$ と定理$\boxed{\ 10\ }$ を用いれば，級数 $(*)$ の和は $\boxed{\ 11\ }$ となる．

問題 D 変数 t の一変数関数 $x(t)$ で，

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = \sinh mt, \qquad x(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

を満たすものをすべて求めなさい．ただし m は実数の定数である．

（ヒント：$\ddot{x} - x = 0$ の解は $x = A\cosh t + B\sinh t$ (A, B は定数) と書ける） [10 点]

問題 E [0 点] この科目の授業，教材，試験などについて，御意見，ご希望，誹謗，中傷など，なんでもご自由にお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません．

Good Luck ♡♡♡

微分積分学第二 B 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 各 5 点

1

$$f_x = 2x(y^2 + 3x + 2), \qquad f_y = 2y(x^2 - 3y + 2).$$

2

$$f_{xx} = 2(y^2 + 6x + 2), \qquad f_{xy} = f_{yx} = 4xy, \qquad f_{yy} = 2(x^2 - 6y + 2)$$

3

$$(0, 0),\ (-\tfrac{2}{3}, 0),\ (0, \tfrac{2}{3}),\ (-2, 2),\ (-1, 1)$$

4	5	6
$(0, 0)$	$(-1, 1)$	$(-\tfrac{2}{3}, 0),\ (0, \tfrac{2}{3}),\ (-2, 2)$

計算スペース（採点の対象にはしません）

学籍番号	氏　名

2014 年 2 月 11 日 09 時 00 分 ~10 時 30 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：1–8:10 点, 9–16:10 点, 17–19:10 点

1 0	2 0	3 0	4 $\frac{1}{3}-a$	5 0	6 $\frac{2}{15}$	7 0	8 6
9 0	10 0	11 0	12 $-\frac{1}{3}+a$	13 0	14 $\frac{1}{5}$	15 0	16 6
17 -1	18 $\frac{2}{3}$	19 $\frac{1}{3}$					

計算スペース（採点の対象にはしません）

学籍番号	氏　名

微分積分学第二 B 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄 配点：1: 5 点; 2–4: 5 点; 5: 5 点; 6–8: 5 点; 9–10: 5 点; 問題 a: 5 点

1 1	2 G	3 $(-1,1)$	4 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n+1}$	5 $\dfrac{x}{1+x^3}$	6 0

7
$$-\frac{1}{3}\log(1+x)+\frac{1}{6}\log(1-x+x^2)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}+\frac{\pi}{6}\right]$$

8 $(-1,1)$	9 F	10 I	11 $-\dfrac{1}{3}\log 2+\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$

a の証明

冪級数 $(\star)$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}y^n$ を考える．

$$\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{3(n+1)+2}}{\frac{(-1)^n}{3n+2}}\right|=\left|\frac{3n+2}{3n+5}\right|\to 1 \qquad (n\to\infty)$$

なので，d'Alembert の公式から $(\star)$ の収束半径は 1 である．したがって $(\star)$ は $|y|<1$ のとき絶対収束し，$|y|>1$ のとき発散する．
ここで $|x^3|<1$ となることと $|x|<1$ となることは同値だから，$(\star)$ の y を x^3 でおきかえた級数 $(\star\star)$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}x^{3n}$ は $|x|<1$ で絶対収束，$|x|>1$ で発散する．さらに $(\star\star)$ に x^2 をかけたものが問題の級数 $(*)$ であるから，$(*)$ は $|x|<1$ で絶対収束し，$|x|>1$ で発散する．したがって $(*)$ の収束半径は 1 である．

計算スペース（採点の対象にはしません）

学籍番号	氏　名

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 定期試験 〔解答用紙 4〕

問題 D の解答欄 配点：10 点

$$x(t) = \frac{1}{m^2-1}\sinh mt - \frac{m}{m^2-1}\sinh t \qquad (m \neq 1 \text{ のとき})$$
$$x(t) = \frac{t}{2}\cosh t - \frac{1}{2}\sinh t \qquad (m = 1 \text{ のとき}).$$

学籍番号	氏　名

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 定期試験 〔解答用紙 5〕

この用紙には，問題 E への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 E [0 点] 何か言い残すことがありましたらお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面の座席表に従って着席してください．**座席表に学籍番号・氏名がない方は監督者まで申し出てください**．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
  提出物の学籍番号を間違えた方がいらっしゃいます．くれぐれも間違えないように．
- 解答用紙 4 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．4 枚揃っていない答案は採点いたしません．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を各列の黒板に向かって**右端**から左，**左端**まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最前列の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号	氏　名