10. 冪級数

与えられた数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ と文字 x に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \tag{10.1}$$

の形の級数を x に関する**冪級数**(べき)という[1]．級数 (10.1) がある範囲 I の x の値に対して収束するならば，これは I 上で定義された関数を表す：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad x \in I = \{x \in \mathbb{R} \mid (10.1) \text{ は収束 }\}. \tag{10.2}$$

第 4 回のテイラー級数は，与えられた関数を冪級数で表すことができる例である．とくに $|x|$ が小さいとき，(10.2) の f は右辺の最初の数項で近似される．

テイラー級数 (4.8) のように $f(a+h)$ を h の冪級数で表すことができれば，f の a の近くの挙動を調べられる．とくに $x = a+h$ とおけば，(4.8) は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

の形に書ける．この式の右辺のような形を a **を中心とする冪級数**ということがある．ここでは，0 を中心とする冪級数 (10.1) を扱うことにする．

10.1 収束半径

命題 10.1. 冪級数 (10.1) が $x = r$ に対して収束するならば，$|x| < |r|$ をみたす任意の x に対して (10.1) は**絶対収束**する．

証明. 定理 8.2 から $a_n r^n$ は 0 に収束するので，番号 N で「$n \geqq N$ ならば $|a_n r^n| < 1$」となるものが存在する．すると，$n \geqq N$ なる n に対して

$$|a_n x^n| = |a_n r^n| \left|\frac{x^n}{r^n}\right| \leqq \rho^n \qquad \left(\rho := \left|\frac{x}{r}\right| < 1\right)$$

なので，例 9.17 から $\sum a_n x^n$ は絶対収束する． □

[*] 2013 年 12 月 10 日

[1] 冪級数：a power series,「巾級数」は嘘字.

ここで，(10.1) に対して

$$r := \sup C, \qquad C := \bigl\{|x| \bigm| \text{級数 } (10.1) \text{ は収束する}\bigr\} \tag{10.3}$$

とおくと，$r \geqq 0$ または $r = +\infty$ となる．この r を冪級数 (10.1) の**収束半径**という[2]．

命題 10.2. 冪級数 (10.1) の収束半径が r であるための必要十分条件は，次が成立することである：

(i) $|x| < r$ ならば (10.1) は絶対収束する．

(ii) $|x| > r$ ならば (10.1) は発散する．

とくに $r = +\infty$ であることと，任意の実数 x に対して (10.1) が絶対収束することは同値である．また $r = 0$ であることと任意の $x \neq 0$ に対して (10.1) が発散することは同値である．

証明．必要性： 式 (10.3) のように r, C をとるとき，

(i)：$|x| < r$ のとき，$\frac{1}{2}(r - |x|) = \varepsilon > 0$ とおくと，上限の性質（注意 7.7 の (2)）から $r - \varepsilon < s$ をみたす $s \in C$ が存在する．とくに s で (10.1) は収束するが，$|x| = r - 2\varepsilon < s$ なので命題 10.1 から (10.1) は絶対収束する．

(ii)：$|x| > r$ をみたす x で (10.1) が収束するならば，命題 10.1 から $(|x| + r)/2$ $(> r)$ でも収束するが，これは r の定義に反する．

十分性： 実数 r が (i), (ii) をみたすとき，(ii) から r は C の上界となる．さらに (i) から r より小さい数は C の上界でない．したがって $r = \sup C$． □

冪級数の収束半径は次のように求められる：

定理 10.3 (コーシー・アダマールの定理[3])**.** 冪級数 (10.1) の収束半径 r は

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}$$

で与えられる．

証明. 各 n に対して $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|}$ なので

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{r}$$

なので，定理 9.19 から（$\alpha = |x|/r$ として）結論が得られる． □

[2] 収束半径：the radius of convergence.

[3] Cauchy, Augustin Louis, 1789–1857; Hadamard, Jacques Salomon, 1865–1963.

定理 10.4 (ダランベールの定理[4])．冪級数 (10.1) に対して，極限値

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = r$$

が存在するならば r が収束半径である．

証明． 問題 9-3 を用いれば定理 10.3 と同様． □

注意 10.5. コーシー・アダマールの定理 10.3 は任意の冪級数の収束半径を与える公式だが，ダランベールの定理では収束半径が求まらないことがある．実際，$a_n = 0$ となる n が無限個ある級数に対して定理 10.4 は適用できない．

例 10.6. (1) 冪級数 $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ の収束半径は $+\infty$ である．実際，ダランベールの定理 10.4 を用いれば，収束半径は $(1/n!)/(1/(n+1)!) = n+1 \to \infty$ となることがわかる．

(2) 冪級数 $1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ の収束半径は 0 である．

(3) 多項式 $p(t)$ に対して，冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$ の収束半径は 1 である．

(4) 多項式 $p(t)$, $q(t)$ に対して冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p(n)}{q(n)}x^n$ の収束半径は 1 である．ただし $q(n)$ は負でない整数の根をもたないものとする． ♢

例 10.7. 冪級数

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2m+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{10.4}$$

$$\left(a_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^m}{n} & (n = 2m+1; m \text{ は負でない整数}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}\right)$$

の収束半径を求めよう．

[4] d'Alembert, Jean Le Rond; 1717–1783.

無限個の a_n が 0 になるので，ダランベールの定理 10.4 は直接使えないので，コーシー・アダマールの定理 10.3 を使う：

$$b_n^+ := \sup\{\sqrt[k]{|a_k|} \mid k \geqq n\} = \sup\left\{\frac{1}{\sqrt[k]{k}} \,\middle|\, k \geqq n, k \text{ は奇数}\right\}$$

とすると，補題 5.22 から

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} b_n^+ = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

となるので，収束半径は 1 である．

ダランベールの定理を用いて次のように収束半径を求めることもできる：s に関する冪級数

$$1 - \frac{1}{3}s + \frac{1}{5}s^2 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m s^m}{2m+1}$$

の収束半径は定理 10.4 から 1 なので，この級数は $|s| < 1$ なら絶対収束，$|s| > 1$ なら発散．いまこの級数の s を x^2 で置き換え，x をかければ，(10.4) が得られるので，これは $|x| < 1$ で絶対収束，$|x| > 1$ で発散する．すなわち収束半径は 1 となる（命題 10.2）． ♢

収束半径が r の冪級数 (10.1) の $x = \pm r$ での挙動にはさまざまな場合がある．

例 10.8. (1) 冪級数 $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ の収束半径は 1 であり，$x = \pm 1$ で発散する．

(2) 冪級数 $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$ の収束半径は 1 であり $|x| < 1$ で絶対収束し，$|x| > 1$ では発散する．さらに $x = 1$ で $\log 2$ に収束（条件収束）する（例 4.3）が，$x = -1$ では発散する（例 8.8）．

(3) 例 10.7 の級数の収束半径は 1 で，$x = \pm 1$ では $\dfrac{\pi}{4}$ に条件収束する（問題 3-5，例 10.14）．

(4) 冪級数 $1 + x + \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^3}{3^2} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ の収束半径は 1 であり，$x = \pm 1$ で絶対収束する（例 8.8）． ♢

10.2 冪級数が定める関数

命題 10.1 から冪級数 (10.1) が収束する範囲 I は区間となり，(10.2) は区間 I 上の関数 f を定める．とくに，冪級数の部分和から定まる関数 f_n を用いて f を次のように表しておく：

$$(10.5)\qquad f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\qquad(x\in I);\qquad f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k.$$

補題 10.9. 式 (10.5) の状況で，冪級数の収束半径 r が正であるとする．このとき区間 $(-r,r)$ に含まれる任意の閉区間 J に対して次が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty}\sup_J|f_n-f|=0.$$

証明． 閉区間 $J=[a,b]\subset(-r,r)$ に対して，$\delta:=\frac{1}{2}\min\{r-b,a-r\}>0$ とすると，$J\subset[-r+2\delta,r-2\delta]$ となる．関数の J での上限は J' での上限を超えないから，$J=[-r+2\delta,r-2\delta]$ で結論を示せばよい．あたえられた級数は $x=r-\delta$ で絶対収束するから，$|a_n(r-\delta)^n|\to 0$ $(n\to\infty)$．したがって，「$n\geqq N$ ならば $|a_n(r-\delta)^n|\leqq 1$」となる番号 N がとれる．このとき，$n\geqq N$ ならば，各 $x\in J$ に対して

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)|&=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k\right|\leqq\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_kx^k|=\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k(r-\delta)^k|\left|\frac{x}{r-\delta}\right|^k\\&\leqq\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{x}{r-\delta}\right|^k\leqq\frac{\rho^{n+1}}{1-\rho}\qquad\left(\rho:=\frac{|x|}{r-\delta}<1\right)\end{aligned}$$

となる．したがって $\sup_J|f_n-f|\to 0$ $(n\to\infty)$． □

定理 10.10. 収束半径 r が正である冪級数が (10.2) で定める関数 f は，区間 $(-r,r)$ で連続である．

証明． 点 $\alpha\in(-r,r)$ をひとつ固定して，$\lim_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)$ を示せばよい．まず $d:=\frac{1}{2}\min\{r-\alpha,\alpha+r\}>0$ とすると，α は $(-r+d,r-d)$ に含まれている．いま，閉区間 $J:=[-r+d,r-d]$ を固定しておく．

正の数 ε を任意にとると，補題 10.9 より，次をみたす番号 N が存在する：

$$n\geqq N\qquad\text{ならば}\qquad|f_n(x)-f(x)|\leqq\sup_J|f_n-f|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad(x\in J).$$

この N に対して部分和 f_N は多項式だから連続関数（例 6.10）．したがって，次をみたす正の数 δ が存在する：

$$|x-\alpha|<\delta\qquad\text{ならば}\qquad|f_N(x)-f_N(\alpha)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

この δ に対して $|x-\alpha|<\delta$ なら

$$\begin{aligned}|f(x)-f(\alpha)|&=|f(x)-f_N(x)+f_N(x)-f_N(\alpha)+f_N(\alpha)-f(\alpha)|\\&\leqq|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(\alpha)|+|f_N(\alpha)-f(\alpha)|<\varepsilon\end{aligned}$$

したがって f は α で連続である（注意 6.8）． □

例 10.8 の (2), (3), (4) のように，収束半径 r の冪級数が $(-r,r)$ の端点で収束する場合もあるが，定理 10.10 は端点での連続性について言及していない．実際，ここでの証明では $\alpha=\pm r$ の場合には有効でない．しかし，端点で冪級数が収束するならば，冪級数が定める関数の連続性が言える：

定理 10.11 (アーベルの連続性定理[5])**.** 冪級数 (10.2) の収束半径が r で，$x=r$ $(x=-r)$ で (10.2) が収束するならば，次が成り立つ：

$$\lim_{x\to r-0}f(x)=f(r)\ \left(\lim_{x\to -r+0}f(x)=f(-r)\right),\quad\text{ただし }f(x):=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

証明は第 11 回に与える．

10.3 項別微分・積分

定理 10.10 から，冪級数 (10.5) で定まる関数 f は $(-r,r)$ で連続なので，積分可能[6]である．

定理 10.12 (項別積分[7])**.** 収束半径が r (>0) の冪級数で (10.2) のように定義される関数 f と任意の x $(-r<x<r)$ に対して次が成り立つ：

$$\int_0^x f(t)\,dt=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n.$$

[5] Abel, Niels Henrik; 1802–1829.

[6] 前期に扱った（証明してはいないが）一変数関数の積分の項目を思い出そう．連続関数の積分可能性の証明は第 11 回の講義ノートで与える．

証明． 式 (10.5) のように部分和 f_n をとると，補題 10.9 から

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x f_n(t)\,dt\right| &= \left|\int_0^x \bigl(f(t)-f_n(t)\bigr)\,dt\right| \leqq \left|\int_0^x \bigl|f(t)-f_n(t)\bigr|\,dt\right| \\ &\leqq \left|\int_0^x \sup_{[-x,x]}\bigl|f(t)-f_n(t)\bigr|\,dt\right| \leqq \sup_{[-x,x]}\bigl|f(t)-f_n(t)\bigr|\,|x| \to 0 \qquad (n\to\infty)\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$f_n(x)$ は x の多項式だから，積分公式が使えて

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k-1}}{k}x^k = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n. \qquad \square$$

定理 10.13 (項別微分)**.** 収束半径が $r\ (>0)$ の冪級数で (10.5) のように定義される関数 f は $(-r,r)$ で微分可能で，次が成り立つ：

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \quad (-r<x<r). \tag{10.6}$$

証明． 命題 9.6 と補題 5.22 から

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

なので，コーシー・アダマールの定理 10.3 から (10.6) の右辺の級数の収束半径は r である．そこで，この級数で与えられる関数を g とおくと，定理 10.12 から $x\in(-r,r)$ に対して

$$\int_0^x g(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = f(x)$$

なので，微分積分学の基本定理より f は微分可能で $f'(x)=g(x)\ (-r<x<r)$． $\square$

例 10.14. 級数

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} \tag{10.7}$$

の和を求めよう（問題 3-5 の別解を与える）．まず定理 8.9 から (10.7) は収束することがわかる．

[7] 項別積分（微分）: integration (differentiation) by term and term.

いま，例 10.7 の (10.4) のような冪級数を考えると，その収束半径は 1 である．したがって定理 10.13 から

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1<x<1)$$

は区間 $(-1,1)$ で微分可能で

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2} \qquad (-1<x<1).$$

したがって

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1}x \qquad (-1<x<1)$$

であるが，$x=1$ で級数 (10.4) は収束するのでアーベルの定理 10.11 から

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \left.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}\right|_{x=1} = \lim_{x\to1-0}\tan^{-1}x = \frac{\pi}{4} \qquad \diamondsuit$$

問　題　10

10-1　例 10.6 を確かめなさい．

10-2　例 10.8 を確かめなさい．

10-3　例 10.14 に倣って，級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^n}$$

の和を求めなさい（例 3.11 の別解）．

10-4　例 10.14 に倣って，級数

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1\frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{9}(\sqrt{3}\pi+3\log 2)$$

であることを示しなさい（例 8.10 (3)）．