11. テイラーの定理と極値問題

11.1 前回の補足

アーベルの定理の証明 第 10 回で挙げたアーベルの連続性定理 10.11 に証明を与えよう．変数 x の冪級数の収束半径が r (>0) ならば $x=rt$ と置き換えれば収束半径 1 の冪級数が得られるので，最初から収束半径 r は 1 としておいてよい．また，与えられた収束半径 1 の冪級数が $x=-1=-r$ で収束するならば，$x=-u$ と置き換えれば $u=1$ で収束する冪級数が得られるので，次の定理を証明すればよいことになる：

定理 11.1. 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が 1 で，さらに $x=1$ とおいた級数が収束するならば，

$$\lim_{x\to r-0} f(x) = X \qquad \text{ただし } f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad X := \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

証明． 数列 $\{a_n\}$ の部分和数列を

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

とおく．すると仮定より $\{\sigma_n\}$ は収束するので，有界である（補題 5.5 の (1)）．したがって，$\{\sigma_n - X\}$ も有界だから

$$|\sigma_n - X| \leqq A \qquad (n=0,1,2,\dots) \tag{11.1}$$

をみたす正の数 A が存在する．

正の数 ε が与えられたとする．このとき，$\{\sigma_n\}$ は X に収束するから，番号 M で次を満たすものをとることができる：

$$n \geqq M \qquad \text{ならば} \qquad |\sigma_n - X| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{11.2}$$

[*] 2014 年 1 月 14 日

また，式 (11.1) の A と (11.2) の M に対して

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4(M+1)A} \tag{11.3}$$

とおいておく．

いま，(11.2) の M に対して $N > M+2$ なる番号 N をとると，$a_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$ $(n \geqq 1)$ だから，$0<x<1$ をみたす x に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n x^n &= \sigma_0 + \sum_{n=1}^{N} (\sigma_n - \sigma_{n-1}) x^n = \sigma_0 + \sum_{n=1}^{N} \sigma_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \sigma_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n (x^n - x^{n+1}) + \sigma_N x^N = (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n x^n + \sigma_N x^N \\
&= (1-x)\left(\sum_{n=0}^{N-1} (\sigma_n - X) x^n + \sum_{n=0}^{N-1} X x^n \right) + \sigma_N x^N \\
&= (1-x)\left(\sum_{n=0}^{M} (\sigma_n - X) x^n + \sum_{n=M+1}^{N-1} (\sigma_n - X) x^n \right) \\
&\qquad + (1-x) X \sum_{n=0}^{N-1} x^n + \sigma_N x^N \\
&= (1-x)\left(\sum_{n=0}^{M} (\sigma_n - X) x^n + \sum_{n=M+1}^{N-1} (\sigma_n - X) x^n \right) \\
&\qquad + X(1-x) \sum_{n=0}^{N-1} x^n + \sigma_N x^N \\
&= (1-x)\left(\sum_{n=0}^{M} (\sigma_n - X) x^n + \sum_{n=M+1}^{N-1} (\sigma_n - X) x^n \right) \\
&\qquad + X(1-x) \frac{1-x^N}{1-x} + \sigma_N x^N \\
&= (1-x)\left(\sum_{n=0}^{M} (\sigma_n - X) x^n + \sum_{n=M+1}^{N-1} (\sigma_n - X) x^n \right) \\
&\qquad + X + (\sigma_N - X) x^N.
\end{aligned}$$

したがって，$0<x<1$ ならば，(11.1), (11.2), (11.3) を用いて

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=0}^{N} a_n x^n - X\right| \\
&\leqq (1-x)\left(\sum_{n=0}^{M}|\sigma_n - X|x^n + \sum_{n=M+1}^{N-1}|\sigma_n - X|x^n\right) + |\sigma_N - X|x^N \\
&< (1-x)A\sum_{n=0}^{M}x^n + (1-x)\sum_{n=M+1}^{N-1}\frac{\varepsilon}{4}x^n + \frac{\varepsilon}{4}x^N \\
&\leqq (1-x)A(M+1) + (1-x)\frac{\varepsilon}{4}x^{M+1}\frac{1-x^{N-M-1}}{1-x} + \frac{\varepsilon}{4} \\
&\leqq (1-x)\frac{\varepsilon}{4\delta} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

とくに，$N \to \infty$ とすると左辺は $|f(x) - X|$ に収束するので，

$$|f(x) - X| \leqq \frac{\varepsilon}{4}\left(2 + \frac{1-x}{\delta}\right) \qquad (0 < x < 1)$$

が成り立つ．したがって $0 < 1 - x < \delta$ をみたす任意の x に対して

$$|f(x) - X| \leqq \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon$$

が得られた．ここで $\varepsilon > 0$ は任意だったから，

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = X$$

である． □

11.2 一変数関数の極値

一変数関数の最大値・最小値は第 2 回の定理 2.1 で扱ったがここで定義の形で意味を明確にしておく：

定義 11.2. 一変数関数 f が a で**最大値** (**最小値**) [1] をとるとは，定義域内のすべての x に対して $f(x) \leqq f(a)$ ($f(x) \geqq f(a)$) が成り立つことである．

例 11.3.
- 関数 $f(x) = x^4$ が $x = 0$ で最小値をとる．

[1] 最大値：the maximum；最小値：the minimum.

- 実数全体で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は実数全体で C^∞-級で

$$f^{(k)}(0) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

となる（第 4 回の例 4.5 参照）．この関数は $x = 0$ で最小値をとる．◇

定義 11.4. 一変数関数 f が a で**極大値** (**極小値**) [2]をとるとは，次を満たす正の実数 ε が存在することである：f の定義域に含まれ，かつ $0 < |x - a| < \varepsilon$ を満たす任意の x に対して，$f(x) < f(a)$ ($f(x) > f(a)$) が成り立つことである．

定義 11.4 は "a に十分近い x に対して $f(x) < f(a)$ ($f(x) > f(a)$) が成り立つ" ということを定量的に述べたものである．

例 11.5.
- 関数 $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で極小値（実は最小値）をとる．
- 関数 $f(x) = x^3 - 3x$ は $x = -1$ で極大値，$x = 1$ で極小値をとる．◇

極値の判定条件

定理 11.6. 関数 f は $x = a$ を含む開区間で C^∞-級とする[3]．

A. $f(x)$ が $x = a$ で極値（極大値または極小値）をとるならば，$f'(a) = 0$ である．

B. (**A** の対偶) $f'(a) \neq 0$ ならば，$f(x)$ は $x = a$ で極大値も極小値もとらない．

C. $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ ($f''(a) < 0$) が成り立つならば $f(x)$ は $x = a$ で極小値（極大値）をとる．

[2] 極大値：a maximal; a local maxima; 極小値：a minimal; a local minima: 極値：an extremal.
[3] 記述を煩雑にしないために強い仮定をおいた．実際 **A**, **B** は f が a で微分可能であれば成り立つ．また，**C** は f が 2 回微分可能であれば成り立つ．

例 11.7. $f(x) = x^3 - 3x$ の極値を調べよう．$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ だから $f'(x) = 0$ が成り立つための必要十分条件は $x = 1$ または $x = -1$ である．したがって定理 11.6 **B** より 1, -1 以外の点では f は極値をとらない．さらに $f''(x) = 6x$ だから，$f''(1) > 0$, $f''(-1) < 0$．したがって定理 11.6 **C** から $f(x)$ は $x = 1$ で極小値 -2, $x = -1$ で極大値 2 をとる． ◇

注意 11.8.
- 定理 11.6 の **A** の逆は成立しない．実際 $f(x) = x^3$ が反例である．
- 定理 11.6 の **C** の逆は成立しない．実際，例 11.5 が反例になっている．

定理 11.6 の B が成り立つ理由（いい加減バージョン）： $m = f'(a)$ とおいて，$m > 0$ の場合を考える．このとき，テイラーの定理 3.1 より，$m = f'(a)$ に注意して

$$(*) \qquad f(a+h) = f(a) + mh + R_2(h) \qquad \text{とおけば} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{R_2(h)}{h} = 0$$

となる．この $R_2(h)$ は h が十分小さければ mh よりもずっと小さいので，十分小さい h の範囲では無視してよい．したがって

$$f(a+h) - f(a) \fallingdotseq mh \qquad (h \text{ が十分 } 0 \text{ に近いとき})$$

である[4]が，$m > 0$ だから，この式の右辺は $h > 0$ のとき正，$h < 0$ のとき負になる．したがって，h が十分小さいときは

$$f(a+h) > f(a) \quad \bigl(h > 0 \text{ のとき}\bigr); \qquad f(a+h) < f(a) \quad \bigl(h < 0 \text{ のとき}\bigr)$$

となるので，どんな小さい ε をとっても "$0 < |h| < \varepsilon$ ならば $f(a+h) > f(a)$", "$0 < |h| < \varepsilon$ ならば $f(a+h) < f(a)$" のいずれも成り立たせることはできない．すなわち f は $x = a$ で極値をとらない．

定理 11.6 の B が成り立つ理由（ちょっと正確バージョン）： $m > 0$ のとき，$(*)$ までは同様．いま $|R_2(h)/(mh)|$ は h を 0 に近づけると 0 に近づくのだから，正の数 δ をうまくとれば

$$(**) \qquad |h| < \delta \qquad \text{ならば} \qquad \left|\frac{R_2(h)}{mh}\right| < \frac{1}{2}$$

[4] "≒" は「およそ等しい」

が成り立つようにできる．$m > 0$ だから $(**)$ は

$$|h| < \delta \qquad \text{ならば} \qquad -\frac{1}{2}m|h| < R_2(h) < \frac{1}{2}m|h|$$

と書き換えられる．したがって $(*)$ より

$$|h| < \delta \qquad \text{ならば} \qquad mh - \frac{1}{2}m|h| < f(a+h) - f(a) < mh + \frac{1}{2}m|h|$$

となる．ここで，$0 < h < \delta$ ならば，$|h| = h$ だから，

$$f(a+h) - f(a) > mh - \frac{1}{2}mh = \frac{1}{2}mh > 0,$$

$0 > h > -\delta$ なら $|h| = -h$ だから

$$f(a+h) - f(a) < mh + \frac{1}{2}m|h| = \frac{1}{2}mh < 0$$

となり，どんな小さい ε をとっても $|h| < \varepsilon$ の範囲で $f(a+h) - f(a)$ は符号を変える．したがって（いいかげんバージョンと同じ）．

定理 11.6 の C が成り立つ理由（いい加減バージョン）： $m = f''(a)$ とおいて，$m > 0$ の場合を考える．このとき，テイラーの定理より ($f'(a) = 0, f''(a) = m$ に注意して)

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}mh^2 + R_3(h) \qquad \text{とおけば} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{R_3(h)}{h^2} = 0$$

となる．この $R_3(h)$ は h が十分小さければ $\frac{1}{2}mh^2$ よりもずっと小さいので，十分小さい h の範囲では無視してよい．したがって

$$f(a+h) - f(a) \fallingdotseq \frac{1}{2}mh^2 \qquad (h \text{ が十分 } 0 \text{ に近いとき})$$

であるが，$m > 0$ だから，この式の右辺は $h \neq 0$ であるかぎり常に正の値をとる．したがって，h が十分小さいときは

$$f(a+h) > f(a)$$

となるので，$f(x)$ は $x = a$ で極小値をとる．$m < 0$ の場合も同様である．

問　題　11

11-1 (1) 関数 $f(x)=x^4$ が $x=0$ で最小値をとることを証明しなさい（例 11.3）.

(2) C^∞-級関数 f の $x=a$ における (1 次，2 次 ...) 微分係数を用いて f が $x=a$ で最大値・最小値，極大値・極小値をとるかどうかを判定するような必要十分条件はあり得ない．そのことの理由を述べなさい（例 11.3 を参照せよ）.

(3) 関数 $f(x)=|x|$ は $x=0$ で極小値をとる（実は最小値をとる）ことを示しなさい（例 11.5）.

11-2 関数 $f(x)=x^4-2x^2$ のグラフを描き，どこで極値 (極大値・極小値) をとるかを指摘しなさい．それらの点で f は最大値・最小値をとるか.

11-3 (1) 定理 11.6 の **A** (**B**) の逆は成立しないことを確かめなさい（注意 11.8）

(2) 定理 11.6 の **C** の逆は成立しないことを確かめなさい（注意 11.8）.

11-4 関数 $f(x)=x^4+px^3+qx^2$ (p,q は定数) の極値を調べなさい.（ヒント：3 次方程式 $f'(x)=0$ が一つの実数解しか持たない場合，3 つの異なる実数解を持つ場合，1 組の重根とそれ以外の一つの解を持つ場合，3 重根を持つ場合に分けて考える）

11-5 定理 11.6 の **B** が成り立つ理由の「いい加減バージョン」の $m<0$ の場合を完成させなさい.

11-6 定理 11.6 の **B** が成り立つ理由の「ちょっと正確バージョン」を完成させなさい.

11-7 定理 11.6 の **C** が成り立つ理由の「ちょっと正確バージョン」をつくりなさい.

11-8 定理 11.6 の状況で $f'(a)=0$, $f''(a)=0$ のときはなにが起きているか.