12. テイラーの定理と極値問題

12.1　2 変数関数の極大値・極小値

前期に学んだ多変数関数，とくに 2 変数関数の極値問題を考えたい．まず，記号・用語の復習からはじめよう：

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と書き，

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x,\ y \text{ は実数 }\} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{「座標平面」}.$$

とする．点 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ と正の数 ε に対して

$$U_\varepsilon(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2\}$$

を点 (a, b) の ε-近傍[1]という．$\mathbb{R}^2$ の部分集合 U が**開集合**であるとは，任意の $(a, b) \in A$ に対してうまく正の数 ε を選べば $U_\varepsilon(a, b) \subset A$ とできることである．また $\mathbb{R}^2$ の部分集合 U が**連結**[2]であるとは，任意の 2 点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in A$ を U 内の連続曲線で結ぶことができることである．これらの概念を用いて，$\mathbb{R}^2$ の連結な開集合のことを **領域**[3]という．これらの用語は前期「微分積分学第一」の第 3 回講義ノートを参照.

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 f が $(a, b) \in D$ で**極大値** (**極小値**) をとるとは，うまく正の数 ε をとれば，任意の $(x, y) \in U_\varepsilon(a, b)$ $((x, y) \neq (a, b))$ に対して $f(x, y) < f(a, b)$ $(f(x, y) > f(a, b))$ が成り立つことである.

ここでは，1 変数関数に対する極値判定条件（定理 11.6）に相当するような 2 変数関数（多変数関数）極値判定条件を与える.

---

*) 2014 年 1 月 21 日

1) ε-近傍：an ε-neighborhood；開集合：an open set.

2) 連結：connected; ここで述べた定義は正確には弧状連結性 pathwise connectedness を表しているが，$\mathbb{R}^n$ の部分集合に対しては連結性と弧状連結性は同値である.

3) 領域：a domain.

12.2　2 変数関数のテイラーの定理

1 変数関数に関する定理 11.6 は，考えている点の近くでの関数の挙動をテイラーの定理（定理 2.9, 3.1）の 2 次の項までで近似することにより得られた．2 変数関数についても同様のことを考える：

定理 12.1 (2 変数関数のテイラーの定理)**.** 2 変数関数 f が $(x, y) = (a, b)$ を含む領域で C^∞-級であるとする．このとき

$$\begin{aligned}(12.1)\quad f(a+h, b+k) &= f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)k^2\right) + R_3(h, k)\end{aligned}$$

と書くと

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R_3(h, k)}{h^2 + k^2} = 0$$

が成り立つ.

証明. あたえられた (a, b) および (h, k) に対して，1 変数関数 $F(t) = f(a+th, b+tk)$ を考えると，F は $[0, 1]$ で C^∞-級であるから，F にテイラーの定理 2.9 を適用すると，

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \frac{1}{3!}F'''(\theta) \qquad (0 < \theta < 1)$$

となるような θ が存在する．ここで，合成関数の微分公式（チェイン・ルール[4]）を用いれば，$F(0) = f(a + 0h, b + 0k) = f(a, b)$,

$$\begin{aligned}F'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k \\ F''(0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)k^2 \\ F'''(\theta) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}h^2k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}k^3\end{aligned}$$

を得る．ただし，最後の式の右辺の偏微分は $(a + \theta h, b + \theta k)$ での値である．とくに f は C^∞-級なので，f の任意の階数の偏導関数は連続である．したがって，例えば

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a + \theta h, b + \theta k) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a, b)$$

---

4) チェイン・ルール：the chain rule, テキスト，第 1 章 3.2, 前期の講義ノート第 6 回を参照.

が成り立つ．したがって $(h,k)=(r\cos t, r\sin t)$ $(r>0)$ とおけば $(h,k)\to(0,0)$ すなわち $r\to 0$ のとき

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a+\theta h, b+\theta k)\frac{h^3}{h^2+k^2}\right)=\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a+\theta h, b+\theta k) r\cos^3 t\right)\to 0$$

が成り立つ．$F'''(\theta)$ の他の項も同様に考えれば $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} F'''(\theta)/(h^2+k^2)=0$ を得る． □

注意 12.2. 定理 12.1 は 2 次式による f の近似とみなすことができる．とくに，(12.1) の h, k に関する 1 次の項までをとれば，1 次式による近似

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k+R_2(h,k), \tag{12.2}$$
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R_2(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

が成り立つことがわかる．

注意 12.3. テイラーの公式 (12.1) の右辺のうち，h, k の 1 次の項は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=df(a,b)\boldsymbol{h}\qquad\left(\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}\right)$$

と表される．ただし $df(a,b)=\bigl(f_x(a,b), f_y(a,b)\bigr)$ は (a,b) における f の **全微分**[5]である．さらに h, k の 2 次の項の 2 倍は，

$$(h,k)\begin{pmatrix}f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b)\\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}={}^t\boldsymbol{h}\,\mathrm{Hess}\,f(a,b)\boldsymbol{h}, \tag{12.3}$$
$$\mathrm{Hess}\,f(a,b):=\begin{pmatrix}f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b)\\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}$$

と表される．ただし ${}^t\boldsymbol{h}$ は列ベクトル $\boldsymbol{h}$ を転置して得られる行ベクトルを表す．ここで，偏微分の順序交換定理[6]から，$\mathrm{Hess}\,f(a,b)$ は 2 次の**対称行列**[7]となる．この行列を f の (a,b) における**ヘッセ行列**[8]とよぶ．

[5] 全微分：the total differential，前期の講義ノート第 5 回参照
[6] 偏微分の順序交換：前期の講義ノート第 3 回参照.
[7] 対称行列：a symmetric matrix.
[8] ヘッセ行列：the Hessian matrix; Hesse, Ludwig Otto, 1811–1874, de.

12.3　2 変数関数の極値判定

定理 12.4. $\mathbb{R}^2$ の領域 D で定義された C^∞-級関数 f が $(a,b)\in D$ で極値をとるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0\qquad\text{かつ}\qquad\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

が成り立つ．

証明. 関数 f が (a,b) で極小値をとるならば，次をみたす正の数 ε が存在する：$h^2+k^2<\varepsilon^2$ ならば $f(a+h,b+k)>f(a,b)$．とくに $|h|<\varepsilon$ のとき $f(a+h,b)>f(a,b)$ なので $F(h):=f(a+h,b)$ は $h=0$ で極小値をとる．したがって定理 11.6 から $F'(0)=f_x(a,b)$ は 0 である．同様に $G(k)=f(a,b+k)$ を考えれば $f_y(a,b)=0$ が成り立つ． □

定理 12.5. $\mathbb{R}^2$ の領域 D で定義された C^∞-級関数 f が $(a,b)\in D$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0\qquad\text{かつ}\qquad\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

をみたしているとする．このとき，

$$\Delta:=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right)^2=\det\mathrm{Hess}\,f(a,b),$$
$$A:=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$$

とおくと，

- $\Delta>0$ かつ $A>0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で極小値をとる．
- $\Delta>0$ かつ $A<0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で極大値をとる．
- $\Delta<0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で極値をとらない．

これを示すために次の補題を用いる：

補題 12.6. h と k の斉次 2 次式

$$\varphi(h,k):=Ah^2+2Bhk+Ck^2\qquad(A,\ B,\ C\ \text{は定数}) \tag{$**$}$$

に対して

- 任意の $(h,k) \neq (0,0)$ に対して $\varphi(h,k) > 0$ となるための必要十分条件は $A > 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ である．
- 任意の $(h,k) \neq (0,0)$ に対して $\varphi(h,k) < 0$ となるための必要十分条件は $A < 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ である．
- φ が正の値も負の値もいずれもとるための必要十分条件は $AC-B^2 < 0$ となることである．
- それ以外（$AC - B^2 = 0$）の場合は，φ は符号を変えないが，$\varphi = 0$ となるような $(h,k) \neq (0,0)$ が存在する．

証明． 2 次式の平方完成

$$\varphi(h,k) = \begin{cases} A\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 + \frac{AC-B^2}{A} & (A \neq 0) \\ C\left(k + \frac{B}{C}h\right)^2 + \frac{AC-B^2}{C} & (C \neq 0) \\ 2Bhk & (A = C = 0) \end{cases}$$

からわかる． □

定理 12.5 の証明（いい加減バージョン）． 定理 12.1 と仮定から

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}\varphi(h,k) + R_3(h,k), \qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R_3(h,k)}{h^2+k^2} = 0$$

が成り立つ．ただし $A := f_{xx}(a,b)$, $B := f_{xy}(a,b)$, $C := f_{yy}(a,b)$ に対して

$$\varphi(h,k) := Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$$

とおいた．$h^2 + k^2$ が十分小さいときは $|R_3(h,k)|$ は $|\varphi(h,k)|$ に比べて小さいので $f(a+h,b+k) - f(h,k)$ は $\frac{1}{2}\varphi(h,k)$ で近似されるので，補題 12.6 から結論が得られる． □

12.4　三変数以上の場合

一般に $\mathbb{R}^n$ の領域 D で定義された C^∞-級関数 f をベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ に実数 $f(\boldsymbol{x})$ を対応させているとみなしておく．このとき，$\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, \dots, a_n) \in D$ におけるテイラーの定理は，

(12.4)

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + df(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + {}^t\boldsymbol{h}\,\mathrm{Hess}\,f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + R_3(\boldsymbol{h}), \qquad \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{R_3(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|^2} = 0.$$

とかける．ただし

$$df(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right),$$

$$\mathrm{Hess}\,f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}.$$

このとき，

事実 12.7.
- f が $\boldsymbol{a}$ で極値をとるならば $df(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ である．
- $df(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ かつ $\mathrm{Hess}\,f(\boldsymbol{a})$ の固有値がすべて正 (負) ならば f は $\boldsymbol{a}$ で極小値（極大値）をとる．
- $df(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ かつ $\mathrm{Hess}\,f(\boldsymbol{a})$ の固有値が符号を変えるならば f は $\boldsymbol{a}$ で極値をとらない．

この事実の後半の 2 つは，次に述べる 2 次形式の性質からわかる：

実数の変数 $(x_1, \dots, x_n)$ の斉次 2 次式を (n 変数の) **2 次形式**という．2 次形式は

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

の形で表される．とくに $x_i x_j = x_j x_i$ であるから，a_{ij} と a_{ji} が等しくなるように係数を按分することができる．すなわち 2 次形式の一般形は

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \qquad (a_{ij} = a_{ji}).$$

これを，列ベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ と対称行列 $A = (a_{ij})$ を用いて

(12.5)
$$\varphi(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x} \qquad (A \text{ は実対称行列})$$

と表すことができる．行列 A を 2 次形式 φ の**表現行列**という．

事実 12.8 (線形代数の復習).

- 実数を成分とする対称行列の固有値は実数である．
- 実数を成分とする対称行列 A は直交行列により対角化できる．

すなわち，実数を成分とする対称行列 A に対して，直交行列 P が存在して

$$^tPAP = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \qquad ({}^tPP = E = \text{単位行列})$$

とできる．ただし $\mu_1, \dots, \mu_n$ は A の固有値である．このことを用い，変数変換

$$\boldsymbol{X} = {}^t(X_1, \dots, X_n) := {}^tP\boldsymbol{x}$$

を行うと，2 次形式 (12.5) は

$$\varphi = \mu_1 X_1^2 + \dots + \mu_n X_N^2$$

と書くことができる．とくに

- $\mu_1, \dots, \mu_n$ がすべて正ならば，$\varphi(\boldsymbol{x}) > 0$ が任意の $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して成立する．このとき 2 次形式 (12.5) は**正値**または**正定値**という．
- $\mu_1, \dots, \mu_n$ がすべて負ならば，$\varphi(\boldsymbol{x}) < 0$ が任意の $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して成立する．このとき 2 次形式 (12.5) は**負値**または**負定値**という．
- $\mu_1, \dots, \mu_n$ の中に正のものも負のものも含まれているならば，$\varphi(\boldsymbol{x})$ は正，負いずれの値もとる．

問　題　12

12-1　次の集合は $\mathbb{R}^2$ の領域か．

$$\mathbb{R}^2, \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqq 0\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1\}, \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

12-2　補題 12.6 の証明を完成させなさい．

12-3　$f(x,y) = x^3 - xy + y^3$ に対して

- $f_x(x,y) = 0$, $f_y(x,y) = 0$ となる (x,y) をすべて求めなさい．（ここで虚数解は考えない．なぜか）
- 上で求めた (x,y) に対して定理 12.5 を適用することにより，次のことを確かめなさい：「$f(x,y)$ は $(x,y) = (1/3, 1/3)$ で極小値 $-1/27$ をとり，それ以外の点では極値をとらない.」

12-4　関数 $f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$ の極値を調べなさい．ただし a, b は正の定数である（テキスト 74 ページ問題 10）.

12-5　関数 $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - x^3 + y^3$ の極値を調べなさい．

12-6　$\mathbb{R}^2$ の領域 D で定義された調和関数[9] f の 2 次偏導関数 f_{xx} が D 上で 0 にならなければ f は D 上で極値をとらない．

[9] 前期の講義ノート第 2 回，演習問題 2-5 参照．