

## 2. 平均値の定理とテイラーの定理

### 2.1 平均値の定理の証明

平均値の定理 1.4 を示すには、次の連続関数の性質（第 8 回講義で扱う予定; ここでは証明を与えない）を用いる：

定理 2.1 (最大・最小値の定理). 閉区間  $[a, b]$  で定義された連続関数  $f$  は、区間  $[a, b]$  で最大値・最小値をもつ。

ここで、区間  $I$  で定義された関数  $f$  が  $c \in I$  で最大値 (最小値) をとる<sup>1)</sup>、とは任意の  $x \in I$  に対して  $f(x) \leq f(c)$  ( $f(x) \geq f(c)$ ) が成り立つことである。関数  $f$  が区間  $I$  で最大値 (最小値) をとるとは、上のような  $c \in I$  が存在することである。

注意 2.2. 上の定義における  $c$  は定義域  $I$  に含まれていることに注意しよう。たとえば  $\mathbb{R}$  全体で定義された関数  $f(x) = \tan^{-1} x$  は、すべての実数  $x$  に対して  $f(x) \leq \pi/2$  をみたしているが  $f(c) = \pi/2$  となる実数  $c$  は存在しないので、最大値をとるとはいえない。

注意 2.3. 定理 2.1 は (第 8 回にのべる中間値の定理と同様) よく考えないとあたり前の定理であるが、実数の連続性<sup>2)</sup> (第 7 回) と深く関わっている。実際、定義域を有理数に限って、 $f(x) = 4x^2 - x^4$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) を考えると、これは  $0 \leq x \leq 2$  上で (定義域を有理数に限っても) 連続な関数だが、最大値をとらない。もちろん、同じ関数を、 $\mathbb{R}$  の区間  $[0, 2]$  上で定義された連続関数と考えれば  $x = \sqrt{2}$  で最大値をとる。

区間  $I$  の点  $c$  が  $I$  の内点<sup>3)</sup> であるとは、 $c$  含む开区間で  $I$  に含まれるものが存在することをいう。たとえば閉区間  $I = [a, b]$  に対して  $c \in (a, b)$  は  $I$  の内点であるが、 $a, b$  は  $I$  の内点ではない。

<sup>\*)</sup>2013 年 10 月 15 日 (2013 年 10 月 22 日訂正)

<sup>1)</sup>最大値 the maximum; 最小値 the minimum.

<sup>2)</sup>実数 a real number; 実数の連続性 continuity of real numbers; 有理数 a rational number.

<sup>3)</sup>内点 an interior point

補題 2.4. 区間  $I$  で定義された関数  $f$  が  $I$  の内点  $c$  で最大値または最小値をとるとする。さらに  $f$  が  $c$  で微分可能ならば  $f'(c) = 0$  が成り立つ。

証明. 点  $c$  は  $I$  の内点だから十分小さい正の数  $\delta$  をとれば、开区間  $(c - \delta, c + \delta)$  は  $I$  に含まれる。いま  $f$  は  $c$  で微分可能だから、極限值

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在する。とくに  $f$  が  $c$  で最大値をとるならば、 $f(c+h) - f(c) \leq 0$  なので

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \begin{cases} \leq 0 & (h > 0 \text{ のとき}) \\ \geq 0 & (h < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるので、 $h$  を 0 に近づけた時の極限值  $f'(c)$  は 0 でなければならない。最小値の場合も同様である<sup>4)</sup>。□

補題 2.5 (ロル<sup>5)</sup>の定理). 閉区間  $[a, b]$  で定義された連続関数  $F$  が开区間  $(a, b)$  で微分可能、かつ  $F(a) = F(b)$  をみたしているならば、

$$F'(c) = 0, \quad a < c < b$$

をみたす  $c$  が少なくとも一つ存在する。

証明. 関数  $F$  は  $[a, b]$  で連続だから、定理 2.1 から  $c_1, c_2 \in [a, b]$  で  $F$  は  $c_1$  で最大値をとり、 $c_2$  で最小値をとるようなものが存在する。もし  $c_1, c_2$  がともに  $a, b$  いずれかの値をとるならば、仮定から  $F(c_1) = F(c_2)$  となって、最大値と最小値が一致する。このとき  $F$  は定数関数となるので、区間  $(a, b)$  で  $F' = 0$  となり結論が得られる。そうでない場合は  $c_1, c_2$  の少なくとも一方が开区間  $(a, b)$  に含まれるので、それを  $c$  とおけば補題 2.4 より  $F'(c) = 0$ 。□

平均値の定理 1.4 の証明. 関数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

に対してロルの定理 (補題 2.5) を適用すればよい (問題 2-2)。□

<sup>4)</sup>「同様である」と書いて証明が省略されていたら、それが本当か自分で確かめてみよう。

<sup>5)</sup>Michel Rolle (1652-1719; Fr); ロルの定理 Rolle's theorem.

定理 2.6 (コーシー<sup>6)</sup>の平均値の定理). 閉区間  $[a, b]$  で定義された連続関数  $f, g$  がともに  $(a, b)$  で微分可能,  $g(a) \neq g(b)$  をみだし, 区間  $(a, b)$  上で  $g'(x) \neq 0$  であるとする. このとき

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad a < c < b$$

をみたす  $c$  が少なくともひとつ存在する.

証明. 関数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

に対してロルの定理 (補題 2.5) を適用すればよい (問題 2-2).  $\square$

## 2.2 高階の導関数

区間  $I \subset \mathbb{R}$  で定義された微分可能な関数  $f$  の導関数  $f'$  が微分可能であるとき,  $f$  は 2 階 (2 回) 微分可能である, といい,  $f'$  の導関数  $f''$  を  $f$  の 2 次導関数<sup>7)</sup> という. 一般に正の整数  $k \geq 2$  に対して,  $k$  階微分可能性,  $k$  次導関数が次のように帰納的に定義される:

区間  $I$  で定義された関数  $f$  が  $(k-1)$  階微分可能であり,  $(k-1)$  次導関数が微分可能であるとき,  $f$  は  $k$  階微分可能であるとい  
い,  $(k-1)$  次導関数の導関数を  $k$  次導関数とよぶ.

関数  $f$  の  $k$  次導関数を

$$f^{(k)}(x), \quad \frac{d^k}{dx^k} f(x), \quad \frac{d^k y}{dx^k}$$

などと書く. 最後の表記は  $y = f(x)$  のように従属変数を  $y$  と表した時に用いられる.

例 2.7. (1) 正の整数  $n$  に対して  $f(x) = x^n$  とすると,  $f^{(k)}(x) = k!x^{n-k}$  ( $k \leq n$  のとき),  $f^{(k)}(x) = 0$  ( $k > n$  のとき) である. ここで  $k = n$  のとき  $f^{(n)}(x) = n!x^0$  は定数関数  $n!$  とみなしている.

<sup>6)</sup> Augustin Louis Cauchy (1789–1857, Fr); これに対して, 平均値の定理 1.4 をラグランジュの平均値の定理ということがある; Joseph-Louis Lagrange (1736–1813, It).

<sup>7)</sup> 2 次導関数 the second derivative;  $k$  次導関数 the  $k$ -th derivative.

- (2)  $f(x) = e^x$  ならば, 任意の負でない整数  $k$  に対して  $f^{(k)}(x) = e^x$ .
- (3)  $f(x) = \cos x$  ならば, 任意の負でない整数  $k$  に対して  $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$ ,  $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x$  である. とくに, 負でない整数  $m$  に対して  $f^{(m)}(x) = \cos(x + \frac{m\pi}{2})$  である.  $\diamond$

定義 2.8. • 区間  $I$  で定義された関数  $f$  が  $I$  で連続であるとき  $f$  は  $C^0$ -級であるという.

- 区間  $I$  で定義された微分可能な関数  $f$  の導関数が連続であるとき  $f$  は 1 階連続微分可能または  $C^1$ -級であるという.
- 区間  $I$  で定義された  $k$  階微分可能な関数  $f$  の  $k$  次導関数が連続であるとき  $f$  は  $k$  階連続微分可能または  $C^k$ -級であるという.
- 任意の正の整数  $k$  に対して  $C^k$ -級であるような関数を  $C^\infty$ -級という.

## 2.3 テイラーの定理

定理 2.9 (テイラー<sup>8)</sup>の定理). 関数  $f$  が  $a$  を含む開区間  $I$  で  $(n+1)$  回微分可能ならば,  $a+h \in I$  となる  $h$  に対して

$$\begin{aligned} (2.1) \quad f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R_{n+1}(h) \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}f^{(j)}(a)h^j + R_{n+1}(h), \\ R_{n+1}(h) &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h), \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

をみたす  $\theta$  が少なくともひとつ存在する<sup>9)</sup>.

<sup>8)</sup> Sir Brook Taylor (1685–1731, En)

<sup>9)</sup> 式 (2.1) の総和記号の  $k=0$  の項において  $h^0$  は  $h=0$  のときも 1 であると約束しておく.

証明 . 区間  $[0, 1]$  で定義された関数

$$F(t) := \left( \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a+th)}{k!} (1-t)^k h^k \right) + (1-t)^{n+1} \left( f(a+h) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k \right)$$

は微分可能で  $F(0) = F(1) = f(a+h)$  をみたしている . これにロルの定理 (補題 2.5) を適用すればよい (問題 2-6) .  $\square$

例 2.10. 再び  $\sqrt{10}$  の近似値を求めよう . 関数  $f(x) = \sqrt{x}$  に  $a = 9, h = 1, n = 1$  としてテイラーの定理 2.9 を適用すると ,

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{9+\theta^3}}, \quad 0 < \theta < 1$$

をみたく  $\theta$  が存在することがわかる . とくに ,  $\theta \in (0, 1)$  だから

$$\begin{aligned} \sqrt{10} &\leq 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8\sqrt{10^3}} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{80\sqrt{10}} \\ &\leq 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{80\sqrt{16}} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{320} \\ &\leq 3 + \frac{1}{6} - \frac{3}{1000} = 3 + \frac{1}{6} - 0.003 \leq 3.16366 \dots \leq 3.164 \\ \sqrt{10} &\geq 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8\sqrt{9^3}} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8 \times 27} \\ &\geq 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8 \times 25} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{200} = 3 + \frac{1}{6} - 0.005 \geq 3.161 \end{aligned}$$

となるので

$$3.161 \leq \sqrt{10} \leq 3.164$$

が成り立つ . とくに  $\sqrt{10} = 3.16 \dots$  (小数第二位まで正しい) . この場合 , テイラーの定理 2.9 の次数  $n$  を 3, 4, ... とあげていくと , 近似の精度がよくなる (問題 2-8) .  $\diamond$

## 問 題 2

2-1 定理 2.1 の仮定が必要であることを , 次のようにして示しなさい :

- 开区間  $(0, 1)$  で定義された連続関数で , 最大値をもつが最小値をもたないものの例を挙げなさい .
- 开区間  $(0, 1)$  で定義された連続関数で , 最大値も最小値ももたないものの例を挙げなさい .
- 閉区間  $[0, 1]$  で定義された (連続とは限らない) 関数で , 最大値も最小値ももたないものの例を挙げなさい .

2-2 平均値の定理の証明 (10 ページ) を完成させなさい . 同様に , コーシーの平均値の定理 2.6 の証明を完成させなさい .

2-3 次のコーシーの平均値の定理 2.6 の証明の誤りを指摘しなさい : 関数  $f, g$  に平均値の定理 1.4 を適用すると

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(c)$$

をみたく  $c \in (a, b)$  が存在することがわかる . この第一の等式を第二の等式で割ると , 結論が得られる .

2-4 コーシーの平均値の定理を用いて , 次を示しなさい (ロピタル<sup>10)</sup>の定理の特別な場合) :

関数  $f(x), g(x)$  が区間  $[a, a+h)$  で連続 , かつ  $(a, a+h)$  で微分可能であるとする . さらに  $f(a) = g(a) = 0$  , かつ極限值

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が存在するならば , 極限值

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

も存在して , 両者は等しい .

2-5 次の極限值を求めなさい .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x}$  .
- $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{5^x - 3^x}{x^2}$  .

<sup>10)</sup>Guillaume Francois Antoine, Marquis de l'Hôpital, 1661–1704, Fr); l'Hospital とも書かれる .

2-6 テイラーの定理 2.9 の証明を完成させなさい。

2-7 次の場合に, 式 (2.1) を具体的に書きなさい。

- $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 1$ ,  $n = 2$ .
- $f(x) = e^x$ ,  $a = 0$ ,  $n = 2$ ;  $n$  は一般の自然数.
- $f(x) = e^x$ ,  $a$  は一般の実数,  $n$  は一般の自然数.
- $f(x) = \cos x$ ,  $a = 0$ ,  $n = 2$ ;  $n = 2k - 1$  ( $k$  は正の整数).
- $f(x) = \sin x$ ,  $a = 0$ ,  $n = 3$ ;  $n = 2k$  ( $k$  は正の整数).
- $f(x) = \tan x$ ,  $a = 0$ ,  $n = 3$ .
- $f(x) = \tan^{-1} x$ ,  $a = 0$ ,  $n = 4$ ;  $n$  は一般の自然数.
- $f(x) = \log(1 + x)$ ,  $a = 0$ ,  $n = 3$ ;  $n$  は一般の自然数.
- $f(x) = (1 + x)^\alpha$ ,  $a = 0$ ,  $n = 3$ ;  $n$  は一般の自然数. ただし  $\alpha$  は実数.

2-8 例 2.10 の  $n$  を 3 にして  $\sqrt{10}$  の近似値を求めなさい. 小数第何位まで求まるか.

2-9  $\sqrt{1.1}$  の近似値を求めよう.

- 関数  $f(x) = \sqrt{x}$  に  $a = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $n = 2$  としてテイラーの定理 2.9 を書きなさい.
- このとき,  $R_3(h)$  以外の項の総和はいくつか.
- $R_3(h)$  の大きさを不等式で評価することによって,  $\sqrt{1.1}$  の値を求めなさい.
- 同じことを  $n = 3$  として試みなさい.

2-10\* 地球 (半径  $R = 6.4 \times 10^6$  メートルの正確な球と仮定する) の赤道の周囲にゴムひもを巻き, その 1 箇所をつまんで 1 メートル持ち上げるとき, ゴムひもの伸びは

$$2 \left( \sqrt{2R+1} - R \tan^{-1} \frac{\sqrt{2R+1}}{R} \right)$$

で与えられる. この値の近似値を手計算で求めなさい.