3. テイラーの定理 2

3.1　テイラーの定理の剰余項

前回挙げたテイラーの定理 2.9 における $R_{n+1}(h)$ のことを**剰余項**[1)]という．とくに (2.1) のように表された $R_{n+1}(h)$ のことをラグランジュ[2)]の剰余項とよぶことがある．

例 2.10 や，問題 2-8, 2-9 などの例でみるように，ある状況では剰余項の値が十分小さいことが期待される．ある意味でこのことを述べたのが次のようなテイラーの定理の書き換えである：

定理 3.1 (テイラーの定理 2)**.** 関数 $f(x)$ は a を含む開区間で C^{n+1}-級とする．このとき，

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n+R_{n+1}(h) \tag{3.1}$$

とおくと　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{R_{n+1}(h)}{h^n}=0$

が成り立つ．

注意 3.2. 定理 2.9 では h は与えられた定数であったが，定理 3.1 の h は 0 に近い値をとる変数で，$h\to 0$ という極限における性質が定理の結論である．

定理 3.1 の証明. 関数 f は開区間 $I:=(a-\delta,a+\delta)$ $(\delta>0)$ で C^{n+1}-級であるとしてよい．このとき $|h|<\delta$ みたす h に対して $a+h\in I$ である．

仮定から f は I で C^{n+1}-級だから，$f^{(n+1)}$ は I 上で連続である（定義 2.8 参照）．したがって，$f^{(n+1)}$ は I に含まれる閉区間 $I':=[a-\frac{\delta}{2},a+\frac{\delta}{2}]$ 上で最大値 m_1，最小値 m_2 をとる．そこで $M:=\max\{|m_1|,|m_2|\}$ とすれば[3)]，

$$\text{各 } x\in I' \text{ に対して}\qquad |f^{(n+1)}(x)|\leqq M \tag{$*$}$$

が成り立つ．

*) 2013 年 10 月 22 日 (2013 年 10 月 29 日訂正)
1) 剰余：remainder.
2) Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813.
3) 記号 $\max\{a,b\}$ は a と b のうち小さくない方を表す.

とくに関数 f は I で $n+1$ 回微分可能だから，テイラーの定理 2.9 から，各 $h\in I'$ に対して

$$R_{n+1}(h):=f(a+h)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta_h h)$$

をみたす θ_h $(0<\theta_h<1)$ が存在することがわかる．このとき $a+\theta_h h\in I'$ であるから，($*$) から，

$$|R_{n+1}(h)|\leqq\frac{|h^{n+1}|}{(n+1)!}M,\qquad\text{したがって}\qquad\left|\frac{R_{n+1}(h)}{h^n}\right|\leqq\frac{M|h|}{(n+1)!}$$

が成り立つので，

$$-\frac{M|h|}{(n+1)!}\leqq\frac{R_{n+1}(h)}{h^n}\leqq\frac{M|h|}{(n+1)!}.$$

この右辺と左辺は $h\to 0$ としたときに 0 となるから，結論が得られた．□

例 3.3. 極限値

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-a-bx}{x^2} \tag{$\star$}$$

が存在するような定数 a,b の値を求めよう．テイラーの定理 3.1 を $f(x)=e^x$, $a=0$, $h=x$, $n=2$ として適用すると

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+R_3(x),\qquad\lim_{x\to 0}\frac{R_3(x)}{x^2}=0 \tag{$\star\star$}$$

を得る．したがって

$$\begin{aligned}\frac{e^x-a-bx}{x^2}&=\frac{(1-a)+(1-b)x+\frac12x^2+R_3(x)}{x^2}\\&=\frac{1-a}{x^2}+\frac{1-b}{x}+\frac{1}{2}+\frac{R_3(x)}{x^2}\end{aligned}$$

となる．この右辺の最後の項は ($\star\star$) から $x\to 0$ のとき 0 に近づくので，極限値が存在するためには

$$X:=\frac{1-a}{x^2}+\frac{1-b}{x}=\frac{1}{x^2}\bigl(1-a+x(1-b)\bigr)$$

が $x\to 0$ で収束しなければならない．いま $a\neq 1$ とすると，$|X|\to\infty$ $(x\to 0)$ となるので，極限が存在するためには $a=1$．このとき $X=(1-b)/x$ だか

ら，これが収束するためには $b=1$ でなければならない．以上から，極限値 $(\star)$ が存在するためには $a=b=1$ でなければならず，そのとき

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{R_3(x)}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$$

となる． ♢

3.2 収束の次数とランダウの記号

テイラーの定理の剰余項の性質を表すために記号を用意する：

記号 3.4. 関数 f, g が

(3.2) $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

をみたすとき，

$$f(x)=o\bigl(g(x)\bigr)\qquad(x\to a)$$

と書く．この o を**ランダウの（小文字の） o 記号**[4)5)]という．とくに $g(x)\to 0$ $(x\to a)$ のとき，(3.2) は，$f(x)$ が $g(x)$ **よりもはやく 0 に近づく**ことを意味している．したがって (3.3) を，

$x\to a$ のとき $f(x)$ は $g(x)$ よりもはやく 0 に近づく，

または

$x\to a$ のとき $f(x)$ は $g(x)$ よりはやい**オーダー**[6)]で 0 に近づく

と読むことがある．

また，$f(x)-g(x)=o\bigl(h(x)\bigr)$ $(x\to a)$ のとき

(3.3) $$f(x)=g(x)+o\bigl(h(x)\bigr)\qquad(x\to a)$$

と書く．

[4)] Edmund Gerorg Hermann Landau; 1877–1938, De.

[5)] ランダウの記号：Landau's symbol; ランダウの記号にはもうひとつ，o と異なる意味をもつ “大文字の O 記号” がある．これは第 5 回に紹介する．

[6)] オーダー（次数）：order

例 3.5. （問題 3-4）

- 定数関数 1 に対して $f(x)=o(1)$ $(x\to a)$ であることは $\lim_{x\to a}f(x)=0$ であることと同値である．
- 整数 m, n に対して $x^m=o(x^n)$ $(x\to 0)$ であるための必要十分条件は $m>n$ が成り立つことである．
- $\cos x=1+o(x)$ $(x\to 0)$. ♢

注意 3.6. 式 $f(x)=o\bigl(g(x)\bigr)$ $(x\to a)$ はあくまでも (3.2) の略記でしかなく，記号 $o\bigl(g(x)\bigr)$ 自体が特別な関数を表しているわけではない．実際，

$$x^2=o(x),\qquad x^3=o(x)\qquad(x\to 0)$$

は正しい式だが，これらを引き算して得られる “$x^2-x^3=0$” は正しくない．

ランダウの記号を用いると，定理 3.1 は次のように書き換えられる：

系 3.7. 関数 $f(x)$ は a を含む開区間で C^{n+1}-級とする．このとき，

(3.4) $$f(a+h)=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^n\right)+o(h^n)\qquad(h\to 0).$$

3.3 テイラーの定理の別証明と積分型剰余項

剰余項の表し方にはさまざまなものがあるが，ここではもうひとつの表示を紹介しておく：

定理 3.8 (テイラーの定理 3)**.** 関数 f が a を含む開区間 I で $n+1$ 回微分可能ならば，$a+h\in I$ となる h に対して，次が成り立つ：

(3.5) $$\begin{aligned}f(a+h)&=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a)h^2+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n+R_{n+1}(h)\\&=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}f^{(j)}(a)h^j+R_{n+1}(h),\end{aligned}$$

$$R_{n+1}(h)=\frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-u)^nf^{(n+1)}\bigl(a+uh\bigr)\,du.$$

注意 3.9. 式 (3.5) の $R_{n+1}(h)$ と式 (2.1) の $R_{n+1}(h)$ は同じ値をもつ．実際，この値は

$$R_{n+1}(h) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) h^k$$

である．定理 2.9, 3.8 はこの値の表示のしかたを与えていることになる．

定理 3.8 の証明. $x = a + h$ とおいて，微積分の基本定理と部分積分の公式を用いると，

$$\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(t)\,dt = \int_a^x (t-x)' f'(t)\,dt \\
&= \big[(t-x)f'(t)\big]_{t=a}^{t=x} - \int_a^x (t-x) f''(t)\,dt \\
&= f'(a)(x-a) - \int_a^x \left(\frac{1}{2}(t-x)^2\right)' f''(t)\,dt \\
&= f'(a)(x-a) - \left[\frac{(t-x)^2}{2} f''(t)\right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)\,dt \\
&= f'(a)(x-a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \int_a^x \left(\frac{(t-x)^3}{6}\right)' f'''(t)\,dt \\
&= \dots \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k\right) + \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

ここで，$t = (1-u)a + ux$ とおいて置換積分を行うと，最後の項の積分は

$$\begin{aligned}
R_{n+1}(h) :&= \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&= \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}\big((1-u)a + ux\big)\,du
\end{aligned}$$

となり，結論を得る． □

注意 3.10. 定理 3.8 の (3.4) の剰余項の形を**積分型剰余項** とよぶことがある．そのほかにもさまざまな剰余項の表示のしかたが知られているが，ここでは深入りしない．

次は，テイラーの定理の剰余項を用いることで，ある種の級数の和が具体的に求まる例である．定理 2.9 の形の剰余項を用いても同様の結論が得られる．

例 3.11. 定理 3.8 を，

$$f(x) = \log(1+x), \qquad a = 0, \qquad h = 1$$

に対して適用してみよう．一般に $k \geqq 1$ に対して

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k},$$

だから，正の整数 n に対して

$$(\sharp)\quad \log 2 = f(1) = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + R_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + R_{n+1}$$

と書けば，

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-u)^n \frac{(-1)^{n+2} n!}{(1+u)^{n+1}}\,du = (-1)^n \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1+u)^{n+1}}\,du$$

となる．ここで $0 \leqq u \leqq 1$ をみたす u に対して $1 \leqq 1+u \leqq 2$ であるから，

$$0 \leqq \frac{(1-u)^n}{(1+u)^{n+1}} \leqq (1-u)^n \qquad (0 \leqq u \leqq 1)$$

となるので，

$$|R_{n+1}| = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1+u)^{n+1}}\,du \leqq \int_0^1 (1-u)^n\,du = \frac{1}{n+1}.$$

したがって，n をどんどん大きくしていったとき，

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$$

が成り立つ．そこで，($\sharp$) で $n \to \infty$ とすると，

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

が成り立つ． ♢

問　題　3

3-1 関数 $f(x)$ は x の n 次多項式で与えられているとする．このとき，

(1) 等式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

が成り立つことを示しなさい．

(2) $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 4$ とするとき $f(\sqrt{2}+2)$，$f(1.1)$ をそれぞれ求めなさい．
（ヒント：前の問いの式を $a = \sqrt{2}$, $a = 1$ の場合に書く.）

3-2 テイラーの定理を用いて次の極限値を求めなさい：

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\tan x - 3x - x^3}{x^5}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1+x) - 2x + x^2}{x^3}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\tan^3 x}$.

3-3 次の極限値が存在するように，定数 a, b の値を定めなさい：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x - a\sin x + bx}{x^5}.$$

3-4 例 3.5 を確かめなさい.

3-5* テイラーの定理 3.8 を $f(x) = \tan^{-1} x$ に対して適用することにより，

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

であることを示しなさい.

3-6* 自然対数の底 e が無理数であることを，以下のように示しなさい.

(1) 関数 $f(x) = e^x$ は実数全体で単調増加であることを示しなさい.

(2) 前回のテイラーの定理 2.9 を $f(x) = e^x$, $a = 0$, $h = 1$, $n = 2$ に対して適用し，$e^\theta < e$ $(0 < \theta < 1)$ であることを用いて $2.6 < e < 3$ であることを示しなさい.

(3) 以下，e は有理数であると仮定して矛盾を導く．$e = m/n$ (m, n は正の整数) とおくと $n \geqq 2$ であることを確かめなさい.

(4) テイラーの定理 2.9 を $f(x) = e^x$,$a = 0$, $h = 1$ として，前の問いの n に対して適用した式を書きなさい.

(5) 前の問いの式の両辺に $n!$ をかけた等式は，テイラーの定理の剰余項に対応する項以外はすべて整数の項からなることを確かめなさい.

(6) 前の問いで得られた等式の，剰余項に対応する項は整数にならないことを示しなさい．これは矛盾なので，背理法が完成した.