4. テイラー級数

4.1 例：テイラーの定理の剰余項の挙動

第3回では，テイラー定理 2.9 の，与えられた n に対する剰余項 $R_{n+1}(h)$ の，$h \to 0$ としたときの挙動を調べた．今回は，テイラーの定理 2.9 の h を固定したときに n を大きくしたときの剰余項 $R_{n+1}(h)$ のふるまいを調べる．

例 4.1. 関数 $f(x) = e^x$ に対して $a = 0$, $h = x$, n を正の整数として，テイラーの定理 2.9 を適用すると

$$
\begin{aligned}
(4.1) \qquad e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_{n+1}(x), \\
R_{n+1}(x) &= \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta_n x}x^{n+1} \qquad (0 < \theta_n < 1)
\end{aligned}
$$

をみたす θ_n が存在することがわかる．ここで f は単調増加関数（問題 3-6）であるから，$0 < \theta_n < 1$ であることに注意すれば

$$
e^{\theta_n x} \leqq \begin{cases} e^x & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}
$$

が成り立つ．とくに $x < 0$ のとき $1 < e^{-x} = e^{|x|}$ だから，各実数 x に対して

$$
|R_{n+1}(x)| \leqq e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).
$$

したがって，節末の補題 4.14 から，任意に与えられた実数 x に対して，

$$
\lim_{n \to \infty} R_{n+1}(x) = 0
$$

が成り立つ．とくに (4.1) で $n \to \infty$ とすれば，任意の実数 x に対して等式

$$
(4.2) \qquad e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k
$$

が成り立つことがわかる． ◇

*) 2013 年 10 月 29 日 (2013 年 11 月 5 日訂正)

例 4.2. 関数 $\cos x$, $\sin x$ に対して例 4.1 と同様の議論を行うと，

$$
(4.3) \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}
$$

$$
(4.4) \qquad \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}
$$

が任意の実数 x に対して成り立つことがわかる（問題 4-1）． ◇

例 4.3. 関数 $f(x) = \log(1+x)$ $(-1 < x \leqq 1)$ に対して，テイラーの定理 2.9 を $a = 0, h = x$ として適用する．正の整数 k に対して $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ であることに注意すれば，テイラーの定理 2.9 から

$$
\begin{aligned}
\log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + R_{n+1}, \\
R_{n+1} &= \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0 < \theta < 1)
\end{aligned}
$$

をみたす θ が存在することがわかる．もし $0 \leqq x \leqq 1$ ならば

$$
(4.5) \qquad |R_{n+1}| \leqq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leqq \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad (n \to \infty).
$$

一方，$-1 < x < 0$ のときは，定理 3.8 の形の剰余項を用いれば，$h := -x$ $(0 < h < 1)$ とおいて

$$
\begin{aligned}
|R_{n+1}| &\leqq |x|^{n+1}\left|\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1+ux)^{n+1}}\,du\right| = h^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1-uh)^{n+1}}\,du \\
&= h^{n+1}\int_0^1 \left(\frac{1-u}{1-uh}\right)^n \frac{du}{1-uh} = h^{n+1}\int_0^1 \frac{s^n}{1-hs}\,ds.
\end{aligned}
$$

ここで，最後の等式は変数変換 $s = (1-u)/(1-uh)$ による．区間 $0 \leqq s \leqq 1$ で $1 - hs \geqq 1 - h$ だから， $0 < h < 1$ に注意すれば

$$
(4.6) \qquad |R_{n+1}| \leqq h^{n+1}\int_0^1 s^n\,ds = \frac{h^{n+1}}{n+1} \leqq \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad (n \to \infty)
$$

となる．したがって，(4.5) と (4.6) から，

$$
(4.7) \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k \quad (-1 < x \leqq 1)
$$

が成り立つ（例 3.11 参照）．等式 (4.7) の左辺は $x > -1$ をみたす任意の x に対して定義されるが，$x > 1$ となる x に対して右辺の級数は意味をもたない（発散する；第 10 回参照）． $\diamondsuit$

4.2　テイラー展開

関数 f は a を含む開区間で C^∞-級（定義 2.8）であるとする．このとき，(2.1) で $R_n(h)$ を定義したとき，ある区間 I のすべての h に対して $\lim_{n\to\infty} R_n(h) = 0$ が成り立つならば，各 $h \in I$ に対して

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(a)h^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k \tag{4.8}$$

が成り立つ．これを f の a のまわりの**テイラー展開**[1] という．とくに (4.8) で $a = 0$ の場合を**マクローリン展開**[2]という[3]．

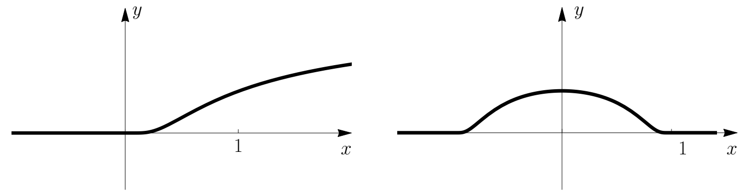
4.3　解析関数

式 (4.2), (4.3), (4.4), (4.7) はそれぞれ e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\log(1+x)$ の 0 の回りのテイラー展開（マクローリン展開）を与えている．

定義 4.4. 点 a を含む区間で C^∞-級な関数 f が a を含む開区間 I で (4.8) のような形で表される，すなわちテイラー展開可能であるとき，f は a で**解析的**（正確には実解析的）とよばれる[4]．とくに f が定義域の各点で実解析的であるとき f は単に実解析的，または**解析関数**という．実解析的であることを “C^ω-級” ということがある[5]．

定義から解析関数は C^∞-級であるが，逆は一般に成立しない．

[1] テイラー展開：the Taylor expansion.
[2] マクローリン展開：the Maclaurin expansion; Colin Maclaurin (1698–1746, Scotland).
[3] 「テイラーの定理」と「テイラー展開」は区別すること．テイラーの定理 2.9 は $f(a+h)$ を h の有限次の多項式で近似したときの誤差を表現する定理である．一方，テイラー展開は，$f(a+h)$ を無限級数で「正確に」表すものである．
[4] (実) 解析的：(real) analytic; 複素変数の関数の解析性は別の形で定義されるので，区別するためは「実」をつけることが多い．
[5] 解析関数：an analytic function. C^ω-級：of class C-omega.



$y = e^{-1/x}$ $(x>0)$; 0 $(x \leqq 0)$　　$y = e^{1/(x^2-1)}$ $(|x|<1)$; 0 $(|x| \geqq 1)$

図 4.1　例 4.5.

例 4.5. 実数全体で定義された関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

と定める（図 4.5 左）．このとき，

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

であるが，$x = 0$ でも微分可能である．実際，補題 4.15 から

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to+0}\frac{e^{-1/h}}{h} = \lim_{u\to+\infty} ue^{-u} = 0,$$
$$\lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to-0}\frac{0}{h} = 0.$$

したがって補題 4.16 より

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = 0$$

となる．以上より

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

となるが，再び補題 4.15 から f' は 0 で連続である．したがって f は C^1-級関数である．

実は f は C^∞-級の関数で，

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-1/x} & (x>0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases} \tag{4.9}$$

と表される．ここで $P_k(t)$ は t の多項式で

$$P_0(t)=1, \qquad P_{k+1}(t) = t^2\bigl(P_k(t) - P_k'(t)\bigr) \quad (k=0,1,2,\dots)$$

で帰納的に定義されるものである（問題 4-5）．したがって f は C^∞-級であるが，0 で実解析的でない．実際，もし 0 で実解析的であれば，十分小さい x に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}0\times x^k = 0$$

となる．ところが，$x>0$ なら x がいくら小さくても $f(x)>0$ となる．これは矛盾なので f は 0 で解析的でない．

同様に

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & (|x|<1) \\ 0 & (|x| \geqq 1) \end{cases}$$

も C^∞-級であるが，± 1 で解析的でない（図 4.5 右）． ◇

4.4 一般化された二項定理

定義 4.6. 実数 α と負でない整数 k に対して

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (k>0), \qquad \binom{\alpha}{0} = 1$$

と定め，これを**二項係数**[6]とよぶ．

例 4.7. [問題 4-3]

$$\binom{-1}{0}=1, \quad \binom{-1}{1}=-1, \quad \binom{-1}{2}=1, \quad \dots, \quad \binom{-1}{k}=(-1)^k.$$

$$\binom{\frac12}{0}=1, \quad \binom{\frac12}{1}=\frac12, \quad \binom{\frac12}{2}=-\frac18, \quad \binom{\frac12}{2}=\frac{1}{16}, \quad \dots.$$

[6] 二項係数：the binomial coefficient

◇

注意 4.8. 正の整数 n に対して，$\binom{n}{k}$ は「n 個から k 個を選ぶ組み合わせの数[7]」である．とくにこのとき，

$$k>n \text{ ならば } \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-n)(n-n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = 0$$

が成り立つ．

補題 4.9. 任意の実数 α と正の整数 k に対して次が成り立つ：

$$\binom{\alpha+1}{k} = \binom{\alpha}{k-1} + \binom{\alpha}{k}.$$

証明． 右辺を変形して左辺を導く：

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{k-1}+\binom{\alpha}{k} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+2)}{(k-1)!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+2)}{k!}\bigl(k+(\alpha-k+1)\bigr) \\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+1-k+1)}{k!} = \binom{\alpha+1}{k}.\end{aligned}$$

□

定理 4.10 (二項定理[8])**.** 正の整数 n に対して次が成り立つ：

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

証明は問題 4-4 とする．この n を正の整数に限らない実数とした $(1+x)^\alpha$ を考えよう：

補題 4.11. 任意の実数 α と正の整数 n に対して

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) \qquad (x\to 0)$$

が成り立つ．ただし $o(\cdot)$ はランダウの記号 3.4 である．

[7] 高等学校の教科書では "${}_n\mathrm{C}_k$" を使うことが多いが，"$\binom{n}{k}$" の方が一般的によく使われるようである．とくに α が正の整数でないときは "${}_\alpha\mathrm{C}_k$" とは書かない．

[8] 二項定理：the binomial theorem

証明． 関数 $f(x) = (1+x)^\alpha$ を微分すれば

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

となるので，テイラーの定理の系 3.7 から結論が得られる． □

補題 4.11 は，x が十分小さい範囲では，二項定理に類似の式が近似的に成り立つことを主張している．ここで，α が正の整数でなければ，二項係数は 0 にならないので，定理 4.10 のような有限の項からなる等式は期待できないことに注意しよう．

補題 4.11 の剰余項をきちんと評価すると[9]次がわかる：

定理 4.12 (一般化された二項定理)**.** 任意の実数 α に対して次が成り立つ：

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \qquad (-1 < x < 1).$$

例 4.13.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k \qquad (-1 < x < 1). \qquad \diamondsuit$$

4.5 いくつかの補題

この節の議論で用いたいくつかの事実をまとめておく．

補題 4.14. 任意の正の実数 x に対して $\lim_{n\to\infty}(x^n/n!) = 0$ が成り立つ．

証明． 正の実数 x に対して $N-1 < x \leqq N$ をみたす正の整数 N が存在する．番号 n が $n > N$ をみたしているとき，

$$\begin{aligned}
0 \leqq \frac{x^n}{n!} &= \frac{x^N}{N!}\frac{x^{n-N}}{n(n-1)\dots(N+1)} \leqq \frac{x^N}{N!}\frac{N^{n-N}}{(N+1)^{n-N}} \\
&= \frac{x^N}{N!}\left(\frac{N+1}{N}\right)^N\left(\frac{N}{N+1}\right)^n = C\left(\frac{N}{N+1}\right)^n \qquad \left(C := \frac{x^N}{N!}\left(\frac{N+1}{N}\right)^N\right)
\end{aligned}$$

となる．$0 < N/(N+1) < 1$ なので $n \to \infty$ としたとき上の式の右辺は 0 に近づくので，結論が得られる． □

[9] 第 10, 11 回に別の方法で証明を与える．ここでは証明には深入りしない．

補題 4.15. 任意の多項式 $P(x)$ に対して，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{e^x} = 0$$

が成り立つ．

証明． 多項式 $P(x)$ の次数を N とする．このとき，テイラーの定理 2.9 を $f(x) = e^x$, $a = 0$, $h = x > 0$, $n = N+1$ として適用すると，

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{(N+1)!}x^{N+1} + \frac{e^{\theta x}}{(N+2)!}x^{N+2} \geqq \frac{1}{(N+1)!}x^{N+1}.$$

ただし θ は $0 < \theta < 1$ をみたす数である．とくに

$$P(x) = p_N x^N + p_{N-1}x^{N-1} + \dots + p_1 x + p_0 \qquad (p_N \neq 0)$$

と書けば，$x > 0$ のときに

$$\left|\frac{P(x)}{e^x}\right| \leqq \frac{(N+1)!|P(x)|}{x^{N+1}} = \frac{(N+1)!}{x}\left|p_N + \frac{p_{N-1}}{x} + \dots + \frac{p_0}{x^N}\right| \to 0 \ (x \to +\infty)$$

となり，結論が得られた． □

補題 4.16. 点 a を含む開区間 I から a を除いた集合 $I\setminus\{a\} = \{x \in I \mid x \neq a\}$ で定義された関数 f が $\lim_{x\to a+0} f(x) = A$, $\lim_{x\to a-0} f(x) = A$ をみたしているならば，$\lim_{x\to a} f(x) = A$ である．

この事実の証明は第 6 回にあたえる．

問　題　4

4-1 式 (4.3), (4.4) を示しなさい．(ヒント：$|\cos X| \leqq 1$, $|\sin X| \leqq 1$ を用いる．)

4-2 双曲線関数 $\cosh x$, $\sinh x$ の $x = 0$ を中心とするテイラー展開を求めなさい．

4-3 例 4.7 を確かめなさい．

4-4 定理 4.10 を証明しなさい．(ヒント：n に関する数学的帰納法．ステップの部分で補題 4.9 を用いる．)

4-5* 例 4.5 の式 (4.9) を示しなさい．(ヒント：数学的帰納法による．)