

## 5. 数列の極限

### 5.1 準備：実数の絶対値

実数  $x$  に対して、数  $|x|$  を (1)  $x \geq 0$  のとき  $|x| = x$ , (2)  $x < 0$  のとき  $|x| = -x$  と定め、 $x$  の絶対値という<sup>1)</sup>。定義から、任意の実数  $x, y$  に対して

$$(5.1) \quad |x| \geq 0, \quad |x| \geq x, \quad |-x| = |x|, \quad |x|^2 = x^2, \quad |xy| = |x||y|$$

が成り立つことがわかる。実数  $a$  と正の数  $\delta$  に対して<sup>2)</sup>

$$(5.2) \quad |x - a| < \delta \iff a - \delta < x < a + \delta$$

である。これは  $x$  が  $a$  の両側  $\delta$  の幅の区間に含まれていることを表している。

補題 5.1 (三角不等式<sup>3)</sup>)。任意の実数  $x, y$  に対して次が成り立つ：

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

証明。まず (5.1) から

$$\begin{aligned} (|x| + |y| - |x + y|)(|x| + |y| + |x + y|) &= (|x| + |y|)^2 - (|x + y|)^2 \\ &= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x + y)^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで  $(x, y) \neq (0, 0)$  ならば  $|x| + |y| + |x + y| > 0$  なので第一の不等式が得られる。除外した  $x = y = 0$  の場合は第一の不等式は明らか。

第一の不等式を用いると、

$$\begin{aligned} |x| &= |y + (x - y)| \leq |y| + |x - y| = |y| + |x - y|, \\ |y| &= |x + (y - x)| \leq |x| + |x - y| \end{aligned}$$

なので第二の不等式が得られる。 □

<sup>\*</sup>) 2013 年 11 月 5 日 (2013 年 11 月 5 日訂正)

<sup>1)</sup> 絶対値：the absolute value, the modulus.

<sup>2)</sup>  $\delta$ : delta;  $\iff$  は “であるための必要十分条件は” と読む。

<sup>3)</sup> 三角不等式：the triangle inequality. この名前は、三角形の 2 辺の長さの和は他の 1 辺の長さより大きい、という定理に対応する不等式  $|AB| + |BC| \leq |AC|$  の類似しているところから来ている。

### 5.2 数列の極限

無限個の項からなる数列  $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$  を<sup>4)</sup>  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ , または範囲を省略して  $\{a_n\}$  と書くことにする。

定義 5.2. 数列  $\{a_n\}$  が実数  $\alpha$  に収束する<sup>5)</sup> とは、以下が成り立つことである。

任意の正の実数  $\varepsilon$  に対して<sup>6)</sup> 以下をみたす番号  $N$  が存在する<sup>7)</sup>：

$n \geq N$  をみたす任意の番号  $n$  に対して  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$  が成り立つ。

このとき「 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 」, 「 $a_n \rightarrow \alpha (n \rightarrow \infty)$ 」と書き、 $\alpha$  を  $\{a_n\}$  の極限值という。数列  $\{a_n\}$  がいかなる数にも収束しないとき、発散するという。

定義 5.3. 数列  $\{a_n\}$  が正の無限大に発散するとは<sup>8)</sup>,

任意の実数  $M$  に対して、次をみたす番号  $N$  が存在する： $n \geq N$

をみたす任意の番号  $n$  に対して  $a_n > M$  が成り立つ。

が成立することである。このことを「 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ 」と書く。

負の無限大に発散することも同様に定義できる (問題 5-1)。

注意 5.4. 数列  $\{a_n\}$  が  $\alpha$  に収束するとは、直観的には「 $n$  をどんどん大きくすると  $a_n$  が  $\alpha$  にどんどん近づく」ことだが、定義 5.2 は「 $n$  を大きくしさえすれば、 $a_n$  は  $\alpha$  に好きなだけ近づくことができる」という表現の方が近いだろう。数学で使われる論理は「どんどん」というような動的な表現が苦手なので、定義 5.2 の書きの方が、論理展開には便利である。「どんどん」や「限りなく」に相当することは「任意の  $\varepsilon$ 」などの表現に含まれている。

補題 5.5 (問題 5-2). (1) 数列  $\{a_n\}$  が収束するならば、次をみたす実数

$M$  が存在する：任意の番号  $n$  に対して  $|a_n| \leq M$ .<sup>9)</sup>

(2) 数列  $\{a_n\}$  が正の数  $\alpha$  に収束するならば、ある番号  $N$  で、 $n \geq N$  をみたす任意の番号  $n$  に対して  $a_n \geq \frac{\alpha}{2}$  が成り立つものが存在する。とくに、ある番号から先は  $a_n$  は正である。

(3) 数列  $\{a_n\}$  が正の無限大に発散するならば数列  $\{1/a_n\}$  は 0 に収束する。

<sup>4)</sup> 数列：a sequence.

<sup>5)</sup> 数列  $\{a_n\}$  が  $\alpha$  に収束する：A sequence  $\{a_n\}$  converges to  $\alpha$ ; 発散する：diverge

<sup>6)</sup>  $\varepsilon$ : epsilon. しばしば “小さい数” を表すのに用いる。

<sup>7)</sup> ここでは「番号」で負でない整数のことを表す。

<sup>8)</sup> 正 (負) の無限大に発散する：to diverge to the positive (negative) infinity.

<sup>9)</sup> すなわち  $\{a_n\}$  は有界。定義 5.9 参照。

証明 . (1): 数列  $\{a_n\}$  が  $\alpha$  に収束するなら (定義 5.2 の  $\varepsilon$  として 1 をとる) 「 $n \geq N$  をみたく  $n$  に対して  $|a_n - \alpha| < 1$ 」となる番号  $N$  が存在する . この  $N$  に対して  $M := \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |\alpha - 1|, |\alpha + 1|\}$  とすれば<sup>10)</sup>,  $M$  は結論をみたく .

(2): 定義 5.2 の  $\varepsilon$  として  $\alpha/2 (> 0)$  をとれば 「 $n \geq N$  をみたく任意の  $n$  に対して  $|a_n - \alpha| < \alpha/2$ 」となる番号  $N$  が存在する . この  $N$  に対して結論が成り立つ .

(3): 正の数  $\varepsilon$  を任意にとると (定義 5.3 の  $M$  を  $1/\varepsilon$  として) 「 $n \geq N$  ならば  $|a_n| > 1/\varepsilon$ 」となる番号  $N$  が存在する . このとき  $n \geq N$  ならば  $|1/a_n| < \varepsilon$  .  $\square$

注意 5.6. 補題 5.5 の (1), (2) は「収束すること」が仮定になっているから , 定義 5.2 の条件が成り立っている . この条件は “任意の  $\varepsilon$ ” に対して成り立っているのだから , 使うときには  $\varepsilon$  の値を好きに選んで良い . 一方 , (3) では , 収束することが結論だから , “任意の  $\varepsilon$ ” に対して条件が成り立つことを示す必要がある . すなわち , 証明の中で  $\varepsilon$  を選ぶことはできない . なお , (3) の仮定は  $+\infty$  に発散する (定義 5.3) ことなので ,  $M$  の値は好きにとれる .

ここで , いくつか「あたりまえ」のことを確認しておく :

補題 5.7. (1) 定数  $c$  に対して  $a_n = c$  とすると  $\{a_n\}$  は  $c$  に収束する .

(2) 数列  $\{a_n\}$  が  $\alpha$  に収束するとき , 数列  $\{ca_n\}$  は  $c\alpha$  に収束する .

(3) 数列  $\{a_n\}$  が  $\alpha$  に ,  $\{b_n\}$  が  $\beta$  に収束するとき ,  $n \rightarrow \infty$  で

$$(a) a_n + b_n \rightarrow \alpha + \beta, \quad (b) a_n b_n \rightarrow \alpha\beta, \quad (c) \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{\alpha}{\beta}$$

が成り立つ . ただし最後の等式では  $\beta \neq 0$  と仮定する .

証明 . (1): 正の数  $\varepsilon$  を任意にとり ,  $N = 0$  とすると ,  $n \geq N$  をみたく任意の  $n$  に対して  $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$  .

(2):  $c = 0$  なら (1) のケースなので ,  $c \neq 0$  としてよい . 正の数  $\varepsilon$  を任意にとる .  $\{a_n\}$  は  $\alpha$  に収束するのだから , 番号  $N$  で 「 $n \geq N$  ならば  $|a_n - \alpha| < \varepsilon/|c|$ 」となるものが存在する . この  $N$  に対して  $n \geq N$  ならば  $|ca_n - c\alpha| = |c| |a_n - \alpha| < \varepsilon$  とできるので  $\{ca_n\}$  は  $c\alpha$  に収束する .

(3) (a) : 番号  $N_1, N_2$  を 「 $n \geq N_1$  ならば  $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ 」, 「 $n \geq N_2$  ならば  $|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ 」となるようにとり  $N = \max\{N_1, N_2\}$  とおくと ,  $n \geq N$  ならば

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &= |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

<sup>10)</sup> $\max\{\dots\}$  は  $\{\dots\}$  内の有限個の数のうち最大のものを表す .

ここで , 三角不等式 (補題 5.1) を用いた .

(3) (b) : 補題 5.5 の (1) から  $|a_n| \leq M$  をみたく正の実数  $M$  が存在する . 与えられた正の数  $\varepsilon$  に対して番号  $N$  を ,

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2\beta}, \quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (n \geq N)$$

となるようにとり , 式変形

$$a_n b_n - \alpha\beta = a_n b_n - a_n \beta + a_n \beta - \alpha\beta = a_n (b_n - \beta) + \beta (a_n - \alpha)$$

を用いればよい (問題 5-4) .

(3) (c) : (b) を認めれば ,  $1/b_n \rightarrow 1/\beta$  を示せば十分 . すると補題 5.5 の (2) から , ある番号  $N_1$  を 「 $n \geq N_1$  ならば  $|b_n| \geq |\beta/2|$ 」となるようにとれる . 一方 ,  $b_n \rightarrow \beta$  なので 「 $n \geq N_2$  ならば  $|b_n - \beta| < \beta^2 \varepsilon/2$ 」となるような番号  $N_2$  をとることができる . そこで ,  $N = \max\{N_1, N_2\}$  とおけば結論が得られる (問題 5-4) .  $\square$

補題 5.8 (はさみうち). (1) 数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  がそれぞれ  $\alpha, \beta$  に収束し , さらにすべての番号  $n$  に対して  $a_n \leq b_n$  が成り立つならば  $\alpha \leq \beta$  .

(2) 数列  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  が , 各番号  $n$  に対して  $a_n \leq c_n \leq b_n$  をみたくし , さらに ,  $\{a_n\}, \{b_n\}$  が同じ値  $\alpha$  に収束するならば ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$  .

(3) 数列  $\{a_n\}$  に対して , 各項の絶対値をとった数列  $\{|a_n|\}$  が 0 に収束するならば ,  $\{a_n\}$  も 0 に収束する .

(4) 数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  がすべての番号  $n$  に対して  $a_n \leq b_n$  をみたくし ,  $\{a_n\}$  が正の無限大に発散するならば ,  $\{b_n\}$  も正の無限大に発散する .

証明 . (1): 背理法による .  $\beta < \alpha$  と仮定すると  $\varepsilon := (\alpha - \beta)/3$  は正の実数である . このとき 「 $n \geq N_1$  をみたく任意の  $n$  に対して  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ 」, 「 $n \geq N_2$  をみたく任意の  $n$  に対して  $|b_n - \beta| < \varepsilon$ 」となる番号  $N_1, N_2$  が存在する . したがって ,  $N = \max\{N_1, N_2\}$  とすると ,  $\varepsilon$  のとり方から , 次のように矛盾が得られる :

$$\alpha - \varepsilon < a_N \leq b_N < \beta + \varepsilon \quad \text{だから} \quad \frac{2}{3}\alpha + \frac{\beta}{3} \leq \frac{2}{3}\beta + \frac{\alpha}{3} \quad \text{すなわち} \quad \alpha < \beta.$$

(2): 任意の番号  $n$  に対して  $a_n - \alpha \leq c_n - \alpha \leq b_n - \alpha$  なので

$$|c_n - \alpha| \leq \max\{|a_n - \alpha|, |b_n - \alpha|\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ . ここで  $\{a_n\}, \{b_n\}$  はともに  $\alpha$  に収束するから , 任意の正の数  $\varepsilon$  に対して , ある番号  $N$  で 「 $n \geq N$  ならば  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ ,  $|b_n - \alpha| < \varepsilon$ 」が成り立つものが存在する . この  $N$  に対して  $n \geq N$  ならば  $|c_n - \alpha| < \varepsilon$  が成り立つ .

(3):  $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$  と (2) を用いる . (4) は演習問題とする (問題 5-3) .  $\square$

## 5.3 実数の連続性

極限を考える際に、実数の性質が重要となってくる。実数全体の集合<sup>11)</sup>  $\mathbb{R}$  は (1) 加減乗除が自由にでき、然るべき演算法則をみたく (2) 大小の関係が定義されて、然るべき性質 (不等式の性質) をみたく、という 2 つの重要な性質があるが、これらは有理数全体の集合ももつ性質である。実数全体の集合を特徴付ける性質は、高等学校の教科書ではあからさまに述べられていないので、ここで紹介する。そのためにいくつか言葉を用意する。

定義 5.9. 数列  $\{a_n\}$  が上に (下に) 有界である<sup>12)</sup> とは「任意の番号  $n$  に対して  $a_n \leq M$  ( $a_n \geq M$ )」となる数  $M$  が存在することである。さらに  $\{a_n\}$  が上に有界かつ下に有界であるとき、有界であるという。

注意 5.10. 数列  $\{a_n\}$  が有界であるための必要十分条件は「任意の番号  $n$  に対して  $|a_n| \leq M$ 」となる正の数  $M$  が存在することである (問題 5-5)。

定義 5.11. 数列  $\{a_n\}$  が単調非減少 (単調非増加) である<sup>13)</sup> とは各番号  $n$  に対して  $a_n \leq a_{n+1}$  ( $a_n \geq a_{n+1}$ ) が成り立つことである。

公理 5.12 (実数の連続性<sup>14)</sup>). 各項が実数の、上に (下に) 有界な単調非減少 (非増加) 数列は収束する。

注意 5.13. ここで公理<sup>15)</sup> とは、以後の議論をするために最初におく仮定のことをいう。直接定義するのではなく「このような性質をもつ」ということによって実数全体の集合を間接的に定義していることになっている。

例 5.14 (十進小数<sup>16)</sup>). 項が 0 から 9 までの整数である数列  $\{p_n\}$  に対して

$$a_n := p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \cdots + \frac{p_n}{10^n} = \sum_{k=0}^n p_k 10^{-k} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

<sup>11)</sup> 実数全体の集合: the set of real numbers.

<sup>12)</sup> 有界: bounded; 上に有界: bounded from above; 下に有界: bounded from below.

<sup>13)</sup> 単調非減少: monotone non-decreasing; 単調非増加: monotone non-increasing. このことをそれぞれ単調増加, 単調減少ということもある。等号が入っているので、増加の代わりに非減少という。

<sup>14)</sup> 実数の連続性: continuity of real numbers.

<sup>15)</sup> 公理: an axiom.

<sup>16)</sup> 十進小数: a decimal fraction.

とする。すると各番号  $n$  に対して  $a_{n+1} - a_n = p_{n+1} 10^{-(n+1)} \geq 0$ ,

$$a_n \leq \sum_{k=0}^n 9 \cdot 10^{-k} = 9 \frac{1 - \frac{1}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}} = 10 \left(1 - \frac{1}{10^{n+1}}\right) \leq 10$$

なので  $\{a_n\}$  は上に有界な単調非減少数列。したがって、ある実数に収束する。この極限値が、無限小数  $p_0.p_1p_2p_3p_4\dots$  が表す実数である。◇

注意 5.15. 公理 5.12 は有理数の範囲では正しくない。実際、例 5.14 の  $\{a_n\}$  は有理数からなる単調非減少数列だが、その極限は有理数の範囲では存在するとは限らない。たとえば、小数  $0.1001000100001000001\dots$  (1 の間の 0 の個数一つずつ増える) が定まる実数は有理数ではない。

命題 5.16. 自然数の列  $\{n\}$  は上に有界ではない。(アルキメデス<sup>17)</sup> の原理)。

証明。数列  $\{n\}$  が上に有界ならば、公理 5.12 から収束する。極限値を  $\alpha$  とすると、定義 5.2 の  $\varepsilon$  を  $\frac{1}{2}$  とし、「 $n \geq N$  ならば  $|n - \alpha| < \frac{1}{2}$ 」となるような  $N$  が存在する。とくに  $\alpha - \frac{1}{2} < n < \alpha + \frac{1}{2}$  ( $n \geq N$ ) であるが、 $n$  を一つ増やすとこの区間からはみ出してしまい、矛盾。したがって、この数列は上に有界でない。□

ここで「上に有界でない」ことを使いやすい形に書きなおそう:<sup>18)</sup>

数列  $\{a_n\}$  が上に有界でないための必要十分条件は、任意の実数  $M$

に対して  $a_n > M$  をみたく番号  $n$  が存在することである。

系 5.17. 任意の実数  $M$  に対して  $M < n$  をみたく自然数  $n$  が存在する。

系 5.18.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ .

証明。任意の実数  $M$  に対して系 5.17 から、 $N > M$  をみたく自然数  $N$  が存在する。このとき、 $n \geq N$  をみたく任意の番号  $n$  に対して  $M < N < n$ 。したがって数列  $\{n\}$  は正の無限大に発散する。□

このことと補題 5.5 から

$$(5.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

が成り立つ。また、系 5.18 の証明をまねることで、次がわかる (問題 5-6):

補題 5.19. 上に有界でない単調非減少数列は正の無限大に発散する。

<sup>17)</sup> Archimedes, B.C. 287–B.C. 212; Gr.

<sup>18)</sup> この手の書き換えは次回もう一度扱う。

## 5.4 極限の具体例

例 5.20. 実数  $s$  に対して, 数列  $\{n^s\}$  は (1)  $s > 0$  ならば正の無限大に発散する. (2)  $s = 0$  ならば 1 に収束する. (3)  $s < 0$  ならば 0 に収束する. ◇

例 5.21 (等比数列). 実数  $r$  に対して  $\{r^n\}$  で与えられる数列は

- (1)  $r > 1$  なら正の無限大に発散する.
- (2)  $r = 1$  なら 1 に収束する.
- (3)  $-1 < r < 1$  なら 0 に収束する.
- (4)  $r < -1$  なら発散するが, 正負いずれの無限大にも発散しない.

(1): もし  $r > 1$  ならば  $r = 1 + h$  ( $h > 0$ ) とおいて二項定理 4.10 を用いれば

$$r^n = (1 + h)^n = \binom{n}{1}h + \binom{n}{2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}h^n \geq 1 + nh \geq nh.$$

右辺は  $n \rightarrow \infty$  で  $+\infty$  に発散するから補題 5.8 (4) から  $r^n$  も  $+\infty$  に発散.

(3):  $|r| < 1$  のとき (1)  $\{1/|r|^n\}$  は  $+\infty$  に発散するから補題 5.5 (3) より  $|r|^n = 1/|r|^n$  は 0 に収束. したがって補題 5.8 (3) から  $\{r^n\}$  は 0 に収束する.

(4)  $r \leq -1$  のとき, 極限值が存在したとする. 極限值が 0 でなければ補題 5.5 (2) より, ある番号から先の項は一定の符号をもたなければならないが,  $r^n$  は  $n$  の偶奇で符号が変わるので矛盾. 一方, 極限值が 0 なら  $\{|r|^n\}$  は 0 に収束するので, 矛盾. ◇

この極限值は第 8 回くらい (項別微分) で用いる.

補題 5.22.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

証明. 天下りだが, 二項定理 4.10 を用いれば

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \binom{n}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots + \binom{n}{n} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n \\ &\geq 1 + \sqrt{2}\sqrt{n} + (n-1) \geq n. \end{aligned}$$

したがって,

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

なので, 例 5.20 と補題 5.8 を用いれば結論が得られる. □

## 問 題 5

5-1 定義 5.3 に倣って数列  $\{a_n\}$  が負の無限大に発散することの定義を書きなさい.

5-2 (1) 補題 5.5 の (1) の証明で,  $M$  をこのようにおけば, すべての番号  $n$  に対して  $|a_n| \leq M$  がたしかに成り立つことを確かめなさい.

(2) 補題 5.5 の (2), (3) の証明で, このような  $N$  が結論が成り立つことを確かめなさい.

5-3 補題 5.8 の (3), (4) に証明をつけなさい.

5-4 補題 5.7 (3) の積の場合, 商の場合の証明を完成させなさい.

5-5 注意 5.10 を確かめなさい.

5-6 補題 5.19 を示しなさい.

5-7 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  を次で定める:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき  $\{a_n\}$  が収束することを次の 2 つを示すことで示しなさい.

(1) 数列  $\{a_n\}$  は単調非減少である.

ヒント: 次のように式変形して最後の式の最初の 2 項を因数分解する.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

(2) 数列  $\{a_n\}$  は上に有界である.

ヒント:  $(1 + 1/n)^n$  を二項定理 4.10 で展開し, 次の関係式を用いる:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}} \quad (k \geq 2).$$

数列  $\{a_n\}$  の極限值が自然対数の底  $e$  である. 通常これを  $e$  の定義とする.