6. 関数の極限と連続関数

6.1　関数の極限

数列に倣って，関数の極限を「限りなく」などの語を用いずに定義する[1]．

定義 6.1. 数直線上の区間 I から $a \in I$ を除いたところで定義された関数 f が $x \to a$ で α に**収束する**とは，次が成り立つことである：

　任意の正数 ε に対して以下をみたす正の数 δ が存在する[2]：

　$0 < |x-a| < \delta$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$.

このことを「$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$」,「$f(x) \to \alpha\ (x \to a)$」と表す．また，

　任意の正数 ε に対して以下をみたす正の数 δ が存在する[3]：

　$0 < x-a < \delta$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$

が成り立つとき，x が a に（右から）近づくときの f の**右極限値**は α であるといい，$\lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha$ と書く．左極限値も同様（問題 6-1).

この定義によって第 4 回の補題 4.16 に証明を与える：

補題 6.2 (補題 4.16). 点 a を含む開区間 I から a を除いた集合 $I \setminus \{a\} = \{x \in I \,|\, x \neq a\}$ で定義された関数 f が $\lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha$ をみたしているならば，$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ である．

証明. 任意の正の数 ε に対して，正の数 δ_1, δ_2 で「$0 < x-a < \delta_1$ ならば $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$」,「$-\delta_2 < x-a < 0$ ならば $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$」となるようなものをとることができる．そこで $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと，$0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$ となる．□

命題 6.3. 区間 I から a を取り除いた集合で定義された関数 f が $x \to a$ で正の数 α に収束するならば，次をみたす正の数 δ が存在する：「$0 < |x-a| < \delta$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $f(x) > 0$ である.」

*)2013 年 11 月 12 日 (2013 年 11 月 12 日訂正)

[1] ここの定義を，習慣的に使う文字を用いて "ε-δ 式の定義" という．コーシー (Augustin Louis Cauchy, 1789–1857 Fr) によるものらしい．

[2] δ: delta.

証明. 定義 6.1 の条件が成り立っているのだから，とくに $\varepsilon = \alpha/2$ とおいてやれば「$0 < |x-a| < \delta$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $|f(x)-\alpha| < \frac{\alpha}{2}$ が成り立つ」ような δ が存在する．このとき，$0 < |x-a| < \delta$ ならば

$$f(x) - \alpha > -\frac{\alpha}{2} \qquad \text{すなわち} \qquad f(x) > \frac{\alpha}{2} > 0$$

が成り立つ.　□

さらに，無限大に発散する数列（定義 5.3）に倣って関数が無限大に発散する，などの定義を与えよう：

定義 6.4. (1)　区間 I から $a \in I$ を除いたところで定義された関数 f が $x \to a$ で正の無限大に発散するとは，次が成り立つことである：

　任意の実数 M に対して以下をみたす正の数 δ が存在する：$0 < |x-a| < \delta$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $f(x) > M$.

　このことを「$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$」「$f(x) \to +\infty\ (x \to a)$」と書く．

(2)　数直線上の区間 $(b, +\infty)$ で定義された関数 f が $x \to +\infty$ で実数 α に収束するとは，次が成り立つことである：

　任意の正の数 ε に対して以下をみたす正の数 $m\ (> b)$ が存在する：

　$x > m$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$.

　このことを「$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$」「$f(x) \to \alpha\ (x \to +\infty)$」と書く．

(3)　数直線上の区間 $(b, +\infty)$ で定義された関数 f が $x \to +\infty$ で正の無限大に発散するとは，次が成り立つことである：

　任意の実数 M に対して以下をみたす正の数 $m\ (> b)$ が存在する：

　$x > m$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $f(x) > M$.

　このことを「$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$」「$f(x) \to +\infty\ (x \to +\infty)$」と書く．

負の無限大に発散すること，x を負の無限大にとばす極限についても同様に定義することができる（問題 6-2）.

この講義では，関数の極限の議論を行う際に，なるべく ε-δ 式を直接用いずに，次の定理によって数列の極限の問題に帰着させることにする．

定理 6.5. 区間 I から $a \in I$ を除いた $I \setminus \{a\}$ で定義された関数 f が $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ をみたすための必要十分条件は，

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad a_n \in I \setminus \{a\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

をみたす**任意の**数列 $\{a_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\alpha$ が成り立つことである．

証明．〔必要性〕$f(x)\to\alpha$ $(x\to a)$ が成り立っているとする．いま，条件 $(*)$ をみたす数列 $\{a_n\}$ をとる時，$f(a_n)\to\alpha$ $(n\to\infty)$ であることを示したい：正の数 ε を任意に取ると，$f(x)\to\alpha$ であることから「$0<|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$」をみたす正の数 δ が存在する．ここで $a_n\to a$ であるから，この δ に対して「$n\geqq N$ ならば $|a_n-a|<\delta$」となるような番号 N をとることができる．とくに条件 $(*)$ から $a_n\neq a$ なので，ここでとった N に対して

$$n\geqq N \qquad\Rightarrow\qquad 0<|a_n-a|<\delta \qquad\Rightarrow\qquad |f(a_n)-\alpha|<\varepsilon$$

となる．ε は任意だったので $f(a_n)\to\alpha$ が得られた．

〔十分性〕対偶を示す．すなわち「$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ でない」ことを仮定して，結論「(任意の数列 $\{a_n\}$ が $(*)$ をみたすならば $f(a_n)$ は α に収束する）でない」を導く．仮定，結論を書き換えると（節末の補足参照）

仮定： 次をみたす ε が存在する：任意の正の数 δ に対して，$0<|x-a|<\delta$ かつ $|f(x)-\alpha|\geqq\varepsilon$ となる x がとれる．

結論： 次をみたす数列 $\{a_n\}$ が存在する：$(*)$ をみたし，$f(a_n)$ は α に収束しない．

この仮定をみたす正の数 ε をとって固定しておく．このとき，任意の番号 n に対して $\delta=1/n$ とおけば，$0<|a_n-a|<\frac{1}{n}$ かつ $|f(a_n)-\alpha|\geqq\varepsilon$ となるような a_n をとることができる．こうして得られた数列 $\{a_n\}$ は条件 $(*)$ をみたす（確かめよ）．一方，$|f(a_n)-\alpha|\geqq\varepsilon$ がすべての n に対して成り立つから $\{f(a_n)\}$ は α に収束しない．□

注意 6.6. 定理 6.5 を否定することで，関数 f が $x\to a$ で α に収束しないための必要十分条件は，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a, \qquad \text{かつ} \qquad \{f(a_n)\}\ \text{は}\ \alpha\ \text{に収束しない}$$

となるような数列 $\{a_n\}$ が存在することである[4]．

6.2 連続関数

定義 6.7. 区間 I で定義された関数 f が I の点 a で**連続**であるとは，

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

をみたすことである．とくに，I の各点で連続な関数を**区間 I で連続**という．

[4] 定理 6.5 の状況で，収束をいうためには a に収束する**任意の**数列 $\{a_n\}$ に対して $\{f(a_n)\}$ が α 収束することを言わなければならないが，収束しないことをいうためには，$\{f(a_n)\}$ が α に収束しないような $\{a_n\}$ をひとつ見つければよい．

注意 6.8. 次の (1), (2) はそれぞれ，区間 I 上の関数 f が $a\in I$ で連続であるための必要十分条件である．

(1) 任意の正数 ε に対して次をみたす正の数 δ が存在することである：「$|x-a|<\delta$ をみたす任意の $x\in I$ に対して $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成り立つ．」（定義 6.1[5][6]）

(2) 区間 I 内の任意の数列 $\{a_n\}$ が a に収束するならば $f(a_n)$ は $f(a)$ に収束する（定理 6.5）．

問題 6-5 を用いれば，次がすぐわかる．

命題 6.9. 区間 I 上で定義された関数 f, g が連続なら

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \quad (fg)(x)=f(x)g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

で定まる $f+g$, fg, f/g は I 上で連続である．ただし，最後の場合は $g(x)\neq 0$ が各 $x\in I$ で成り立っているとする．

例 6.10. (1) 定数関数，恒等関数[7] $\mathrm{id}(x)=x$ は $\mathbb{R}$ で連続である．

(2) 多項式で与えられる関数は $\mathbb{R}$ で連続である．実際，多項式は定数関数と恒等関数から足し算と掛け算によって得られる．

(3) 有理関数，すなわち (多項式)/(多項式) の形の関数は，分母が 0 にならないような区間で連続である．

(4) 微分可能な関数は連続である（定理 1.1）．

◇

例 6.11. 関数 f が a を含む開区間でで C^1-級 (3 ページ) で，$f'(a)>0$ が成り立っているならば，f が I 上で単調増加であるような a を含む開区間 I が存在する．実際，C^1-級であることから $f'(x)$ は連続だから $\lim_{x\to a} f'(x)=f'(a)>0$.

[5] 定義 6.1 では，条件の中に "$0<|x-a|<\delta$" というフレーズがあるが，ここでは "$|x-a|<\delta$" と "$0<$" の部分が抜けている．ここで扱うケースでは $|x-a|=0$，すなわち $x=a$ のときは自動的に $|f(x)-f(a)|=|f(a)-f(a)|=0<\varepsilon$ となるので，$x=a$ を除外する必要がない．

[6] 区間 I が閉区間で，a が区間の端点の場合，連続性の定義を右または左極限でするべきかもしれないが，たとえば，点 a が区間の左端のとき，定義 6.1 は $x\to a+0$ の極限をとっていることと同じである．実際，"$0<|x-a|<\delta$ をみたす $x\in I$" は，"a が区間の左端のときは $a<x<a+\delta$ をみたす x" のことである．

[7] x に対して x それ自身を対応させる関数を恒等関数 the identity function という．

したがって，命題 6.3 から $0 < |x-a| < \delta$ ならば $f'(x) > 0$ となる正の数 δ が存在する．このことと定理 1.11 から f は区間 $(a-\delta, a+\delta)$ で単調増加である．例 1.3 と比較せよ． ◇

6.3 補足：ド・モルガンの法則

今回使った「収束することの否定」を記述するために，ド・モルガンの法則[8]の復習をしておく．ここでは，P, Q, R などで，真（しん）・偽（ぎ）いずれかの値をとる文を表すこととする[9][10]．このとき，次のように定める[11]

- 「P かつ Q」は，P，Q がともに真のとき真，それ以外は偽.
- 「P または Q」は，P，Q がともに偽のとき偽，それ以外は真.
- 「P でない」は P の真・偽を入れ替える.
- 「P ならば Q」は P が真で Q が偽となるとき偽，それ以外は真.

とくに

(6.1) 「P ならば Q」 は 「(P でない) または Q」 と同値

である．次の**ド・モルガンの法則**は高等学校でも習ったかもしれない：

事実 6.12 (ド・モルガンの法則).

「(P かつ Q) でない」 は「(P でない) または (Q でない)」と同値,
「(P または Q) でない」は「(P でない) かつ (Q でない)」 と同値.

事実 6.12 と (6.1) から

(6.2) 「(P ならば Q) でない」 は 「P かつ (Q でない)」 と同値.

さて，不定の文字 x を含む文 $P(x)$, $Q(x)$ に対して

[8] ド・モルガンの法則：de Morgan's laws; ド・モルガン：Augustus de Morgan, 1806–1871,
[9] きちんと論理学の記号・用語にしたがって形式的に説明するべきだろうが，ここでは直観が働くよう，日常用語によって説明する．本来証明が必要なところも端折ることにする．
[10] 真：true; 偽：false.
[11] P かつ Q：P and Q; P または Q：P or Q; P でない：not P; P ならば Q：P implies Q.

- 「すべての x に対して $P(x)$」
- 「ある x に対して $P(x)$」すなわち「$P(x)$ となる x が存在する」

という形の文を全称命題（前者），特称命題（後者）という．

例 6.13. (1) 「任意の実数 x に対して $x^2 \geqq 0$ である」という文はすべての実数 x を "$x^2 \geqq 0$" に代入した「$0^2 \geqq 0, 1^2 \geqq 0, (-1)^2 \geqq 0, \pi^2 \geqq 0 \dots$」という無限個の言明がすべて真なので，真である．

(2) 「任意の実数 x に対して $x^2 > 0$ である」という文はすべての実数 x を "$x^2 \geqq 0$" に代入した「$0^2 > 0$, $1^2 > 0$, $(-1)^2 > 0$, $\pi^2 > 0 \dots$」という無限個の言明のうち，最初の 1 つが偽なので偽である．

(3) 「ある実数 x に対して $x^2 \leqq 0$ である」という文はすべての実数 x を "$x^2 \geqq 0$" に代入した「$0^2 \leqq 0$, $1^2 \leqq 0$, $(-1)^2 \leqq 0$, $\pi^2 \leqq 0 \dots$」という無限個の言明のうち，最初の 1 つが真なので真である．

(4) 「ある実数 x に対して $x^2 < 0$ である」という文はすべての実数 x を "$x^2 \geqq 0$" に代入した「$0^2 < 0$, $1^2 < 0$, $(-1)^2 < 0$, $\pi^2 < 0 \dots$」という無限個の言明のすべてが偽なので偽である． ◇

例 6.13 のように，全称命題は，考えている x の範囲全体にわたって $P(x)$ を "and" でつなげたもの，全称命題は，考えている x の範囲全体にわたって $P(x)$ を "or" でつなげたものとみなせる．これらの否定についても，有限個の and, or の場合と同様の法則が成り立つ：

事実 6.14 (ド・モルガンの法則 2).

(1) 「(すべての x に対して $P(x)$ が成り立つ) でない」は「ある x に対して $P(x)$ が成り立たない」と同値.

(2) 「(ある x に対して $P(x)$ が成り立つ) でない」は「すべての x に対して $P(x)$ が成り立たない」と同値.

例 6.15. (1) $P =$「**数列 $\{a_n\}$ が α に収束する**」の否定，すなわち「$\{a_n\}$

が α に収束しない」ことの言い換えを与えよう．定義 5.2 から P は

任意の正の数 ε に対して

$$\Big[\text{ある自然数 } N \text{ が存在して} \Big(\text{すべての自然数 } n \text{ に対して} \\ \{ n \geqq N \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \varepsilon \} \Big) \Big]$$

であるから，順番に事実 6.14, (6.2) を適用して,「P でない」は

ある正の数 ε に対して

$$\Big[\text{任意の自然数 } N \text{ に対して} \Big(\text{ある自然数 } n \text{ が存在して} \\ \{ n \geqq N \text{ かつ } |a_n - \alpha| \geqq \varepsilon \} \Big) \Big]$$

となる．これをもう少し書き換えると「$\{a_n\}$ が α に収束しない」とは

「次をみたす正の数 ε が存在する：任意の番号 N に対して
$n \geqq N$ かつ $|a_n - \alpha| \geqq \varepsilon$ となる n をとることができる.」

(2) 同様に「$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ でない」は（問題 6-4）

「次をみたす正数 ε が存在する：任意の正の数 δ に対して
$0 < |x - a| < \delta$ かつ $|f(x) - \alpha| \geqq \varepsilon$ となる x がとれる.」 $\diamondsuit$

問　題　6

6-1 定義 6.1 の右極限の真似をして左極限値の定義を作りなさい.

6-2 定義 6.4 に倣って

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha,$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty, \dots$$

であることの定義を作りなさい.

6-3 定理 6.5 に倣って，問題 6-2 の各々が成り立つための必要十分条件を数列を用いて述べなさい.

6-4 例 6.15 (2) を確かめなさい.

6-5 区間 I から a を抜いた $I \setminus \{a\}$ で定義された関数 f, g が，$x \to a$ のときに α, β に収束してるとする．このとき

$$f(x) + g(x) \to \alpha + \beta, \qquad f(x)g(x) \to \alpha\beta, \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{\alpha}{\beta}$$

が成り立つ．ただし，最後の式では $\beta \neq 0$ とする.（ヒント：定理 6.5 と，数列の極限に関する補題 5.7 を用いる.）

6-6 次で定義される関数 f, g を考える：

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}, \qquad g(x) := \{f(x)\}^2.$$

このとき

(1) $\lim_{x \to +0} f(x)$, $\lim_{x \to -0} f(x)$, $\lim_{x \to +0} g(x)$, $\lim_{x \to -0} g(x)$ を求めなさい.

(2) $\lim_{x \to 0} f(x)$, $\lim_{x \to 0} g(x)$ を求めなさい.

(3) f, g は 0 で連続か.