

## 7. 連続関数の性質

第2回に与えた平均値の定理の証明で、連続関数に関する最大・最小値の定理(定理2.1)を用いた。今回はそれに証明を与えよう。そのために、実数の連続性公理5.12のいくつかの言い換えを説明する。

### 7.1 区間縮小法

定理7.1 (ワイエルストラス<sup>1)</sup>の区間縮小法). 数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  が条件

- (1) 各番号  $n$  に対して  $a_n < b_n$ ,
- (2)  $\{a_n\}$  は単調非減少,  $\{b_n\}$  は単調非増加,
- (3)  $b_n - a_n$  は  $n \rightarrow \infty$  で0に収束する.

をみたら,  $\{a_n\}, \{b_n\}$  は共通の極限值  $c$  に収束する. とくに  $c$  は, すべての番号  $n$  に対して  $a_n \leq c \leq b_n$  をみたら唯一の実数である.

注意7.2. 定理7.1が「区間縮小法」<sup>2)</sup>とよばれるのは以下による: 仮定(1)から  $I_n := [a_n, b_n]$  は空でない閉区間; 仮定(2)から各  $n$  に対して  $I_n \supset I_{n+1}$ , すなわち  $\{I_n\}$  は入れ子になった区間の列; 仮定(3)から区間  $I_n$  の長さが0に近づく. これらの仮定のもと, 結論は「すべての区間  $I_n$  に共通に含まれるただ一つの実数  $c$  が存在する」ということである.

定理7.1の証明. 仮定(1), (2)より, 任意の番号  $n$  に対して

$$a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1 \leq b_0, \quad b_n > a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_1 \geq a_0$$

なので,  $\{a_n\}, \{b_n\}$  はそれぞれ上に有界な単調非減少数列, 下に有界な単調非増加数列である. したがって連続性の公理5.12からこれらはそれぞれ極限值  $\alpha, \beta$  に収束する. ここで仮定(3)と補題5.7から  $\beta - \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$  なので  $\beta = \alpha$ . ここですべての番号  $n$  に対して  $a_n \leq x$  が成り立つなら, 補題5.8の(1)と補題5.7(1)から  $\alpha \leq x$ . 同様に, すべての  $n$  に対して  $b_n \geq x$  が成り立つなら  $x \leq \alpha$ . したがって, 結論が成り立つ.  $\square$

<sup>\*</sup>)2013年11月19日

<sup>1)</sup>Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815–1897, De.

<sup>2)</sup>区間縮小法の定理: the nested interval theorem.

### 7.2 上限・下限

定義7.3. 実数の集合  $X \subset \mathbb{R}$  が上に有界(下に有界)であるとは, 「任意の  $x \in X$  に対して  $x \leq M$  ( $x \geq M$ )」をみたすような実数  $M$  が存在することである. この実数  $M$  のことを  $X$  の上界(下界)という<sup>3)</sup>. 集合  $X$  が上に有界かつ下に有界なときに,  $X$  は有界であるという.

注意7.4. 数列  $\{a_n\}$  が上に有界である(定義5.9)ことと,  $\{a_n\}$  の全ての項を集めた集合が定義7.3の意味で上に有界であることは同値である.

定義7.5. 集合  $X$  の要素  $M$  が  $X$  の上界(下界)であるとき,  $M$  を  $X$  の最大値(最小値)という<sup>4)</sup>.

また, 集合  $X$  の上界  $M$  に対して, それより小さい  $X$  の上界が存在しないとき,  $M$  を  $X$  の上限という<sup>5)</sup>. 同様に  $X$  の下界  $M$  に対して, それより大きい  $X$  の下界が存在しないとき  $M$  を  $X$  の下限という.

例7.6. (1) 区間  $I = [0, 1]$  に対して1以上の任意の実数は  $I$  の上界, 1は  $I$  の上限, 1は  $I$  の最大値である.

- (2) 区間  $J = (0, 1)$  に対して1以上の任意の実数は  $J$  の上界, 1は  $J$  の上限であるが,  $1 \notin J$  なので1は  $J$  の最大値ではない.
- (3) 集合  $X$  が最大値(最小値)をもてば, それが上限(下限)である.
- (4) 集合  $X$  の上限(下限)が  $X$  の要素ならば, それは  $X$  の最大値(最小値)である.  $\diamond$

注意7.7. 実数  $\alpha$  が集合  $X \subset \mathbb{R}$  の上限であるための必要十分条件は

- (1) 任意の  $x \in X$  に対して  $x \leq \alpha$  が成り立つ.
- (2) 任意の正の数  $\varepsilon$  に対して  $\alpha - \varepsilon < x$  をみたす  $x \in X$  が存在する.

実際, (1)は  $\alpha$  が  $X$  の上界であることを表す. また, (2)は  $\alpha$  より小さい数 ( $\alpha - \varepsilon$  と表している)は  $X$  の上界ではないということを表している. 下限の場合に対応する条件を書いてみよ(問題7-1).

<sup>3)</sup>上界: an upper bound; 下界: a lower bound.

<sup>4)</sup>最大値: the maximum; 最小値: the minimum.

<sup>5)</sup>上限: the lowest upper bound, the supremum; 下限: the highest lower bound, the infimum.

定理 7.8 (上限・下限の存在 (実数の連続性)). 上に (下に) 有界な実数の部分集合  $X$  は上限 (下限) をもつ.

注意 7.9. 定理 7.8 は実数の連続性 (公理 5.12) の異なる表現とみなせる (問題 7-7). とくに定理 7.8 は有理数に対しては成立しない. 実際, 有理数の集合  $X \subset \mathbb{Q}$  を  $X := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$  とすると<sup>6)</sup>,  $X$  は上に有界な  $\mathbb{Q}$  の部分集合である. 実際 2 は  $X$  の上界であるが, 有理数の範囲で上界の最小値は存在しない.

定理 7.8 の証明. 集合  $X$  が上に有界であるとして, その上界の一つを  $M$  とする. いま  $x_0 \in X$  をひとつとると  $x_0 \leq M$  である. そこで, 2 つの数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  を

$$a_0 := x_0 - 1, \quad b_0 := M,$$

$$(a_{j+1}, b_{j+1}) := \begin{cases} \left( \frac{a_j + b_j}{2}, b_j \right) & \left( \frac{a_j + b_j}{2} \text{ が } X \text{ の上界でないとき} \right) \\ \left( a_j, \frac{a_j + b_j}{2} \right) & \left( \frac{a_j + b_j}{2} \text{ が } X \text{ の上界であるとき} \right) \end{cases} \quad (j \geq 0)$$

と定める. すると, これらの数列は定理 7.1 の条件をみたす (問題 7-2). 実際  $I_j := [a_j, b_j]$  とすると,  $I_{j+1}$  は  $I_j$  を二等分した区間のうち一方となっている. したがって, 区間縮小法 (定理 7.1) により  $\{a_n\}, \{b_n\}$  は同じ極限值  $c$  に収束する. 以下, この  $c$  が  $X$  の上限であることを示す.

まず, 注意 7.7 (1) が成り立つ. 実際,  $b_0$  はとり方から  $X$  の上界. もし  $b_j$  が  $X$  の上界ならば,  $b_{j+1}$  はそのとり方から  $X$  の上界なので, 数学的帰納法の原理から各  $b_n$  は  $X$  の上界. したがって, 各  $x \in X$  をひとつ固定すると  $x \leq b_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) が成り立つので, 極限をとると  $x \leq c$  (補題 5.8 (1)). すなわち, 任意の  $x \in X$  に対して  $x \leq c$  が成り立つ.

一方, 各番号  $n$  に対して  $a_n < x$  をみたす  $X$  の要素  $x$  が存在する. 実際,  $a_0 < x_0 \in X$  である. また,  $a_j < x$  をみたす  $X$  の要素  $x$  が存在すると仮定すると,

- $(a_j + b_j)/2$  が  $X$  の上界ならば,  $a_{j+1} = a_j$  だから  $a_{j+1} < x$  をみたす  $x \in X$  が存在する.
- $(a_j + b_j)/2$  が  $X$  の上界でないならば, この値が  $a_{j+1}$  だから  $a_{j+1} < x$  となる  $x \in X$  が存在する.

このことから, 注意 7.7 (2) が成り立つことを示そう: 任意の正の数  $\varepsilon$  をとると,  $\{a_n\}$  が  $c$  に収束することから「 $n \geq N$  ならば  $|a_n - c| < \varepsilon$ 」となる番号  $N$  が存在する. この  $N$  に対して  $c - \varepsilon < a_N$  なので  $c - \varepsilon < a_N < x$  をみたす  $x \in X$  が存在する.

以上から  $c$  が  $X$  の上限である. 下限の場合も同様にすればよい (問題 7-3).  $\square$

<sup>6)</sup>有理数全体の集合 the set of rational numbers を  $\mathbb{Q}$  で表す.

記号 7.10. 実数の集合  $X$  が上に有界 (下に有界) のとき, その上限 (下限) を  $\sup X$  ( $\inf X$ ) と表す.

集合  $X \subset \mathbb{R}$  が上に有界でない (下に有界でない) ときは,  $\sup X = +\infty$  ( $\inf X = -\infty$ ) と書く.

この記号を用いると,  $\mathbb{R}$  の部分集合  $X, Y$  に対して

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \sup(X \cup Y) &= \max\{\sup X, \sup Y\}, \\ \inf(X \cup Y) &= \min\{\inf X, \inf Y\} \end{aligned}$$

が成り立つ<sup>7)</sup> (問題 7-5).

### 7.3 関数の値の上限・下限

区間  $I$  で定義された関数  $f$  に対して, その値をすべて集めてできる集合

$$(7.2) \quad f(I) := \{f(x) \mid x \in I\}$$

を  $f$  の像または「 $f$  による区間  $I$  の像」という<sup>8)</sup>. すなわち

- 数  $y$  が  $f(I)$  の要素であるための必要十分条件は,  $f(x) = y$  となる  $x \in I$  が存在することである.
- 数  $y$  が  $f(I)$  の要素でないための必要十分条件は, どんな  $x \in I$  に対しても  $y \neq f(x)$  となることである.

例 7.11. (1) 开区間  $I = (-1, 1)$  で定義された関数  $f(x) = x^2$  に対して,  $f(I) = [0, 1)$  である.

(2) 区間  $J = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  上の関数  $f(x) = \tan x$  に対して  $f(J) = \mathbb{R}$  である.

(3) 関数  $f(x) = \tanh x$  に対して  $f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$  である.  $\diamond$

関数  $f$  が ( $I$  で) 上に有界 (下に有界, 有界) であるとは, その像  $f(I)$  が 上に有界 (下に有界, 有界) となる (定義 7.3 参照) ことである. とくに像

<sup>7)</sup> $X \cup Y$  は  $X$  と  $Y$  の合併集合 the union of  $X$  and  $Y$  を表す.  $\max\{a, b\}, \min\{a, b\}$  はそれぞれ  $a, b$  のうち小さい方, 大きくない方を表すが,  $\max\{a, +\infty\} = +\infty, \min\{a, -\infty\} = -\infty$  と約束しておく.

<sup>8)</sup>像: the image.

$f(I)$  の上限・下限を

$$\begin{aligned}\sup_I f &= \sup_{x \in I} f(x) := \sup f(I) = \sup\{f(x) \mid x \in I\} \\ \inf_I f &= \inf_{x \in I} f(x) := \inf f(I) = \inf\{f(x) \mid x \in I\}\end{aligned}$$

と書く (記号 7.10). たとえば, 像  $f(I)$  が上に有界でない, ということは

$$(7.3) \quad \sup_I f = +\infty \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \text{任意の実数 } M \text{ に対して } f(x) > M \text{ を} \\ \text{みたま } x \in I \text{ が存在する} \end{array} \right)$$

と表される.

注意 7.12. 区間  $I$  で定義された関数  $f$  に対して,  $f(c) = \sup_I f$  ( $f(c) = \inf_I f$ ) をみたま  $I$  の点  $c$  が存在するならば,  $f$  は  $c$  で最大値 (最小値) をとる.

#### 7.4 最大・最小値の定理

定理 7.13 (最大・最小値の定理 (定理 2.1)). 閉区間  $I = [a, b]$  で連続な関数  $f$  は,  $I$  で最大値・最小値をとる.

補題 7.14. 閉区間  $I = [a, b]$  で連続な関数  $f$  の像  $f(I)$  は有界である.

証明. いま  $f(I)$  が上に有界でないとして矛盾を導こう. このとき  $I$  を二つに分けた区間  $[a, \frac{a+b}{2}]$ ,  $[\frac{a+b}{2}, b]$  のいずれかが少なくとも一方では  $f$  は上に有界でない. 実際, (7.1) から両方の区間で上に有界ならば,  $I$  でも有界となって矛盾が生じる.

このことに注意して, 数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を,  $a_0 := a$ ,  $b_0 := b$ , 各番号  $j \geq 0$  に対して

$$(a_{j+1}, b_{j+1}) := \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{a_j + b_j}{2}, b_j \right) \quad \left( \left[ \frac{a_j + b_j}{2}, b_j \right] \text{ で } f \text{ が上に有界でないとき} \right) \\ \left( a_j, \frac{a_j + b_j}{2} \right) \quad \left( \left[ \frac{a_j + b_j}{2}, b_j \right] \text{ で } f \text{ が上に有界であるとき} \right) \end{array} \right\}$$

と定める. すると, 各  $n$  に対して, 区間  $[a_n, b_n]$  で  $f$  は上に有界でないので,  $a_n \leq c_n \leq b_n$  かつ  $f(c_n) \geq n$  をみたまような数  $c_n$  をとることができる. これにより, 新しい数列  $\{c_n\}$  が定義された. 数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  は区間縮小法 (定理 7.1) の条件をみたしているので, 共通の極限值  $c \in [a, b]$  に収束する. さらに  $a_n \leq c_n \leq b_n$  だから  $\{c_n\}$  も同じ  $c$  に収束する (補題 5.8).

仮定より  $f$  は  $c$  で連続だから, 定理 6.5 により  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = f(c)$  が成り立つ. 一方,  $\{c_n\}$  のとり方から  $f(c_n) \geq n$  なので  $\{f(c_n)\}$  は正の無限大に発散する. これは矛盾であるから  $f$  は  $I$  で上に有界である. 下に有界であることも同様に示される.  $\square$

定理 7.13 の証明. 補題 7.14 から  $f$  は  $I$  で有界なので,  $f(I)$  の上限を  $\alpha$  とおく. このとき, 数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を  $a_0 := a$ ,  $b_0 := b$ , 各番号  $j \geq 0$  に対して  $J := \left[ \frac{a_j + b_j}{2}, b_j \right]$  において

$$(a_{j+1}, b_{j+1}) := \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{a_j + b_j}{2}, b_j \right) \quad \left( \sup_J f = \alpha \text{ のとき} \right) \\ \left( a_j, \frac{a_j + b_j}{2} \right) \quad \left( \sup_J f \neq \alpha \text{ のとき} \right) \end{array} \right\}$$

と定める. すると, (7.1) から各  $n$  に対して区間  $I_n := [a_n, b_n]$  の  $f$  の上限は  $\alpha$  である. とくに, 各  $n$  に対して

$$(*) \quad a_n \leq c_n \leq b_n, \quad \alpha - \frac{1}{n} < f(c_n) \leq \alpha$$

となる数  $c_n$  をとることができる (注意 7.7). これで, 新しい数列  $\{c_n\}$  が定義された. このとき, 補題 7.14 と同様の議論で,  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$  は同じ極限值  $c$  に収束する.

仮定より  $f$  は  $c$  で連続だから, 定理 6.5 により  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = f(c)$  成り立つが, とくに (\*) から  $f(c) = \alpha = \sup_I f$  である. したがって  $f$  は  $c \in [a, b]$  で最大値をとる (注意 7.12). 最小値の存在も同様に示される.  $\square$

#### 7.5 中間値の定理

高等学校で学んだ中間値の定理<sup>9)</sup>も, 最大・最小値の定理と同様, 実数の連続性の帰結である. この定理に証明を与えよう.

定理 7.15. 閉区間  $[a, b]$  で連続な関数  $f$  が  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$  をみたまならば,  $f(c) = 0$ ,  $a < c < b$  をみたま実数  $c$  が少なくともひとつ存在する.

証明. 数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を  $a_0 := a$ ,  $b_0 := b$ , 各番号  $j \geq 0$  に対して

$$(a_{j+1}, b_{j+1}) := \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{a_j + b_j}{2}, b_j \right) \quad \left( f\left(\frac{a_j + b_j}{2}\right) < 0 \text{ のとき} \right) \\ \left( a_j, \frac{a_j + b_j}{2} \right) \quad \left( f\left(\frac{a_j + b_j}{2}\right) \geq 0 \text{ のとき} \right) \end{array} \right\}$$

と定める. すると, 各  $n$  に対して  $f(a_n) < 0$ ,  $f(b_n) \geq 0$  が成り立つ. 定理 7.13 の証明などと同様に  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  は同じ極限值  $c \in [a, b]$  に収束するが,  $f$  の連続性から

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0, \quad f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$$

が成り立つので  $f(c) = 0$ . さらに, 仮定より  $f(a)$ ,  $f(b)$  は 0 でないので  $a < c < b$  が成り立つ.  $\square$

<sup>9)</sup> 中間値の定理: the intermediate value theorem.

例 7.16 (冪乗根). 正の実数  $\alpha$  と正の整数  $n$  に対して

$$(7.4) \quad c^n = \alpha \text{ となる正の実数 } c \text{ がただ一つ存在する.}$$

この  $c$  を  $\alpha$  の  $n$  乗根<sup>10)</sup> という.

事実 (7.4) を示そう.

ただ一つであること: 二つの正の数  $c_1, c_2$  が  $c_1^n = c_2^n = a$  をみたすならば,

$$0 = c_1^n - c_2^n = (c_1 - c_2)(c_1^{n-1} + c_1^{n-2}c_2 + \cdots + c_1c_2^{n-2} + c_2^{n-1})$$

となるが, 右辺の 2 つめの因子は正だから 0 でない. したがって  $c_1 = c_2$ <sup>11)</sup>. 存在すること: (1)  $\alpha = 1$  の場合は  $c = 1$  とすればよい. (2)  $0 < \alpha < 1$  のとき  $I = [0, 1]$ ,  $f(x) = x^n - \alpha$  とすると,  $f$  は  $I$  で連続 (例 6.10) かつ  $f(0) = -\alpha < 0$ ,  $f(1) = 1 - \alpha > 0$  が成り立つので, 中間値の定理 7.15 から  $f(c) = 0$  ( $0 < c < 1$ ) をみたす  $c$  が存在する. それが求めるものである. (3)  $\alpha > 1$  ならば  $J = [0, \alpha]$ ,  $f(x) = x^n - \alpha$  に対して,  $f(0) < 0$ ,  $f(\alpha) = \alpha^n - \alpha = \alpha(\alpha^{n-1} - 1) > 0$  であるから中間値の定理から結論が得られる.  $\diamond$

例 7.17 (逆関数). 関数  $f$  は区間  $[a, b]$  で連続, かつ単調増加であるとする. このとき,

$$(7.5) \quad \text{任意の } y \in f(I) \text{ に対して } f(x) = y \text{ をみたす } x \in [a, b] \text{ がただ一つ存在する.}$$

実際,  $F(x) = f(x) - y$  に対して中間値の定理を適用すればよい. とくに  $y \in f(I)$  は任意にとれるから,

$$\mathbb{R} \supset f(I) \ni y \mapsto \text{“} f(x) = y \text{ をみたす } x \text{”} \in \mathbb{R}$$

により新しい関数が定義される. この関数を  $f$  の逆関数とよび  $f^{-1}$  と書く<sup>12)</sup>. 連続関数  $f$  の逆関数  $f^{-1}$  は  $f(I)$  で連続である (問題 7-6).  $\diamond$

<sup>10)</sup>  $\alpha$  の  $n$  乗根: the  $n$ -th root of  $\alpha$ ; 平方根: the square root; 立方根: the cubic root.

<sup>11)</sup> これは高等学校の範囲.

<sup>12)</sup> 逆関数: the inverse function;  $f^{-1}$ : the inverse of  $f$ .

## 問 題 7

- 7-1 注意 7.7 に倣って実数  $\alpha$  が  $X \subset \mathbb{R}$  の下限であるための条件を書きなさい.  
 7-2 定理 7.8 の  $\{a_n\}, \{b_n\}$  が定理 7.1 の仮定をみたしていることを確かめなさい.  
 7-3 定理 7.8 の上限の場合の証明をまねして下限の場合の証明を作りなさい.  
 7-4 区間  $(a, +\infty)$  で定義された関数  $f$  が

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$  をみたすとは, 任意の正の数  $\varepsilon$  に対して次をみたす数  $M$  が存在することである:  $x > M$  をみたす任意の  $x$  に対して  $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  をみたすとは, 任意の正の数  $A$  に対して次をみたす数  $M$  が存在することである:  $x > M$  をみたす任意の  $x$  に対して  $f(x) > A$ .

- (1) この定義に倣って,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  の定義を述べなさい.  
 (2) 多項式  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  ( $a_n \neq 0$ ) に対して

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & (a_n > 0 \text{ のとき}) \\ -\infty & (a_n < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つことを示しなさい.  $x \rightarrow -\infty$  の場合はどうか (ヒント:  $a_n$  の符号と  $n$  の偶奇で場合が分かれる).

- (3) 奇数次の多項式は少なくともひとつ実根 (多項式  $f(x)$  に対して  $f(c) = 0$  となる実数  $c$ ) をもつことを, 中間値の定理 7.15 を用いて示しなさい (中間値の定理の仮定をみたすような区間をどうやってとるか).  
 (4) 関数  $e^x$  は多項式で表せないことを示しなさい (ヒント:  $x \rightarrow \pm\infty$  の極限を考えよ.)

7-5\* 式 (7.1) が成り立つことを確かめなさい.

(注意:  $X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ または } x \in Y\}$ .)

7-6\* 例 7.17 で得られた逆関数  $f^{-1}$  は  $f(I)$  で連続であることを確かめなさい.

7-7\* 連続性の公理 5.12 を未知とし, 定理 7.8 が成り立つことを認めて, 公理 5.12 の主張が成り立つことを示しなさい. すなわち, 上限・下限の存在を認めて, 上に有界な単調非減少数列が収束することを示しなさい (ヒント:  $\{a_n\}$  を上に有界な単調非減少数列として, そのすべての項を集めてできる集合を  $A$  とすると  $A$  は上に有界. したがって  $\alpha := \sup A$  が存在するが, それが極限値である.)