

8. 級数

8.1 級数の収束・発散

数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して

$$(8.1) \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

の形を級数または無限級数という¹⁾。級数 (8.1) に対して

$$(8.2) \quad s_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

によって新たな数列 $\{s_n\}$ (部分和) を定義する²⁾。

定義 8.1. 級数 (8.1) が収束するとは、式 (8.2) で与えられる数列 $\{s_n\}$ が収束することである。このとき、 $\{s_n\}$ の極限值 c を級数 (8.1) の和とよび、

$$c = a_0 + a_1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

と表す³⁾。収束しない級数は発散するという。

定理 8.2. 級数 (8.1) が収束するならば、数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する。

証明。一般に収束する数列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して $q_n = p_{n+1}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) で定まる数列 $\{q_n\}$ は同じ極限值に収束する (問題 8-2)。

級数の和を c とすると、式 (8.2) の $\{s_n\}$ と $\{t_n = s_{n+1}\}$ はどちらも c に収束する。したがって

$$0 = c - c = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n. \quad \square$$

^{*}) 2013 年 11 月 26 日 (2013 年 11 月 26 日訂正)

¹⁾ 級数: a series; 無限級数: an infinite series; 式 (8.1) は一般に数を表すのではなく、 a_j を記号 “+” でつないで並べた “絵” とみなす。

²⁾ 式 (8.2) の右辺は有限個の和なので、 s_n はひとつの数である。

³⁾ すなわち、(8.1) は、収束するときに限り、一つの数を表すことになる。

定理 8.2 の対偶をとれば

系 8.3. 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない⁴⁾ならば級数 (8.1) は発散する。

例 8.4. 定理 8.2 の逆は成立しない。実際、次の例がある⁵⁾：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{であるが} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{は発散する。}$$

このことを確かめよう。部分和を $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ とおく。正の整数 m に対して $n \geq 2^m - 1$ をみたま番号 n を任意にとると、

$$\begin{aligned} s_n &\geq s_{2^m-1} = \sum_{k=1}^{2^m-1} \frac{1}{k} = \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=2^{l-1}}^{2^l-1} \frac{1}{k} \right) \\ &\geq \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=2^{l-1}}^{2^l-1} \frac{1}{2^l} \right) = \sum_{l=1}^m \frac{2^{l-1}}{2^l} = \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

番号 m は任意にとれるので、とくに $\{s_n\}$ は正の無限大に発散する (定義 5.3 の条件をみたまことは各自確かめよ)。この級数を調和級数という⁶⁾。◇

例 8.5. 実数 r に対して初項 1、公比 r の等比級数は $|r| < 1$ のとき収束し、

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad (|r| < 1 \text{ のとき})$$

となり、それ以外の場合は発散する。実際、例 5.21 より $|r| \geq 1$ なら $\{r^n\}$ は 0 に収束しないので、系 8.3 より考えている級数は発散する。一方、 $|r| < 1$ のときは例 5.21 から

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \rightarrow \frac{1}{1-r}$$

となるので、結論が得られる。◇

⁴⁾ このことは $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ と異なる。例 6.15 を参照のこと。

⁵⁾ 式 (8.1) では添字が 0 から始まっているが、この例では添字が 1 から始まる。問題の性質によって添字の番号の付け方が異なるが、適切に読み替えて欲しい。

⁶⁾ 調和級数: the harmonic progression; 等比級数: a geometric progression (幾何級数); 等差級数: an arithmetic progression (算術級数)。

8.2 正項級数

数列 $\{a_n\}$ の各項が $a_n \geq 0$ をみたすとき，級数 (8.1) は正項級数とよばれる⁷⁾．級数 (8.1) が正項級数であるとき，(8.2) で定義される部分和 $\{s_n\}$ は単調非減少数列だから，上に有界なら収束し（実数の連続性公理 5.12），上に有界でないなら正の無限大に発散する．このことから，次の収束判定法が得られる：

命題 8.6 (正項級数の比較)．負でない実数からなる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が各 n に対して $a_n \leq b_n$ をみたしているとする．このとき

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束するならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する．
- (2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が発散するならば $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ も発散する．

証明．部分和をそれぞれ

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k, \quad t_n := \sum_{k=0}^n b_k$$

とおくとこれらは単調非減少数列で，仮定より $s_n \leq t_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) が成り立つ．

(1): $\sum b_n$ が β に収束するならば，各番号 n に対して $t_n \leq \beta$ なので， $s_n \leq t_n \leq \beta$ となる．この右辺は n に関係ない定数だから $\{s_n\}$ は上に有界．したがって s_n は収束する．

(2): $\sum a_n$ が発散するなら $\{s_n\}$ は正の無限大に発散するから，補題 5.8 より $\{t_n\}$ も正の無限大に発散する． \square

注意 8.7. 級数の有限個の項を入れかえても収束・発散という性質は不変である⁸⁾．したがって命題 8.6 の仮定は「ある番号 N から先の番号 n に対して $a_n \leq b_n$ 」とおきかえてもよい．さらに，有限個の項は負であっても構わない．

⁷⁾ 正項級数: a nonnegative-term series; 言葉の意味からは「非負項級数」というべきだが，習慣的に正項級数とよぶ．

⁸⁾ 和の値は変わる．

例 8.8. 実数 p に対して，級数

$$(8.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^p = 1 + 2^p + 3^p + \dots$$

は

- (1) $p \geq -1$ ならば発散する．
- (2) $p < -1$ ならば収束する⁹⁾．

このことを示そう．番号 n を一つ固定するとき， $f(x) = n^x$ は x の単調増加関数であることに注意する．

(1): $p \geq -1$ ならば， $n^p \geq n^{-1} = 1/n$ なので，例 8.4 と命題 8.6 (2) から (8.3) は発散する．

(2) ($p \leq -2$ の場合): まず $p \leq -2$ の場合， $n \geq 2$ に対して

$$n^p \leq n^{-2} = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

ここで

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

は 1 に収束するので，命題 8.6 の (1) から (8.3) は収束する¹⁰⁾

(2) ($-2 < p < -1$ の場合): $p = -1 - q$ ($q \in (0, 1)$) とおくと， $n \geq 2$ で

$$(n-1)^{p+1} - n^{p+1} = \frac{1}{(n-1)^q} - \frac{1}{n^q} = \frac{1}{n^q} \left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^q - 1 \right)$$

である．ここで，テイラーの定理 2.9 から，ある $\theta \in (0, 1)$ に対して

⁹⁾ 収束することは示すことができるが，和を求めるのは別問題である．たとえば $p = -2$ の場合， $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ となるが，これはオイラーによって 1735 年に求められたといわれている．このような「値を求める」問題は単なる練習問題でないことが多い．Leonhard Euler, 1707–1783, Sz.

¹⁰⁾ ここで，比較する数列 $1/(n(n-1))$ は $n \geq 2$ でしか定義されていないが，級数の収束には最初の有限個の項の挙動は関わりないので $n \geq 2$ の部分の収束を論じれば十分である（注意 8.7 参照）．

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^q &= 1 + \frac{q}{n-1} + \frac{q(q-1)}{2(n-1)^2} \left(1 + \frac{\theta}{n-1}\right)^{q-2} \\ &\geq 1 + \frac{q}{n-1} - \frac{q(1-q)}{2(n-1)^2} \geq 1 + \frac{q}{n-1} \left(1 - \frac{1-q}{2(n-1)}\right) \\ &= 1 + \frac{q}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) \geq 1 + \frac{q}{2(n-1)} \geq 1 + \frac{q}{2n} \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $0 < q < 1$, $n \geq 2$ を用いた．したがって

$$n^p \leq \frac{2}{q}((n-1)^{p+1} - n^{p+1}) \quad (n \geq 2)$$

であるが, $p < 0$ に注意すれば

$$\sum_{k=2}^n \frac{2}{q}((k-1)^{p+1} - k^{p+1}) = \frac{2}{q}(1 - n^{p+1}) \rightarrow \frac{2}{q} \quad (n \rightarrow \infty)$$

となるので, 命題 8.6 の (1) から (8.3) は収束する. \diamond

8.3 交代級数

項がひとつおきに符号を変えるような級数を交代級数¹¹⁾という.

定理 8.9 (交代級数の和). 単調非増加で 0 に収束する数列 $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し $a_n = (-1)^n q_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とおくと級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q_n = q_0 - q_1 + q_2 - q_3 + \dots$$

は収束する.

証明. ある番号 n で $q_n = 0$ ならば, そこから先の項はすべて 0 なので, すべての番号 n に対して $q_n > 0$ となる場合のみを考えればよい.

部分 and $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ を考え, 正の整数 j に対して $a_j := s_{2j-1}$, $b_j := s_{2j}$ とおくと, $\{a_j\}$, $\{b_j\}$ は区間縮小法 (定理 7.1) の仮定をみたす. 実際,

$$\begin{aligned} b_j - a_j &= s_{2j} - s_{2j-1} = (-1)^{2j} q_{2j} = q_{2j} > 0 \\ a_{j+1} - a_j &= s_{2j+1} - s_{2j-1} = (-1)^{2j+1} q_{2j+1} + (-1)^{2j} q_{2j} = q_{2j} - q_{2j+1} \geq 0 \\ b_{j+1} - b_j &= s_{2j+2} - s_{2j} = q_{2j+2} - q_{2j+1} \leq 0, \end{aligned}$$

さらに $q_n \rightarrow 0$ から $b_n - a_n \rightarrow 0$. したがって定理 7.1 から, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は共通の極限值 c に収束する. すなわち, 任意の正の数 ε に対して番号 N_0 で

$$j \geq N_0 \quad \text{ならば} \quad |a_j - c| = |s_{2j-1} - c| < \varepsilon, \quad |b_j - c| = |s_{2j} - c| < \varepsilon$$

となるものが存在する. そこで $N = 2N_0 - 1$ とすれば「 $n \geq N$ ならば $|s_n - c| < \varepsilon$ 」となり $\{s_n\}$ が c に収束することがわかる. \square

例 8.10. (1) 級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

は収束する. この級数は例 3.11 で現れたもので, そこでは和の値 ($\log 2$) まで求めているが, 収束することだけなら定理 8.9 だけから結論できる.

(2) 問題 3-5 の級数

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

は収束する. 和は $\pi/4$ である.

(3) 級数

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

は収束する. 第 10 回で示すようにこの値は

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \frac{1}{9}(\sqrt{3}\pi + 3 \log 2)$$

である. \diamond

¹¹⁾交代級数: an alternating series.

問 題 8

8-1 次は正しいか．正しければ証明を，正しくなければ反例をあげなさい．

- (1) 級数 $\sum a_n$ が収束するならば， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である．
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ならば級数 $\sum a_n$ は収束する．

8-2 数列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ が c に収束するとする．このとき， $q_n = p_{n+1}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) で定まる数列 $\{q_n\}$ も c に収束することを，定義 5.2 を直接つかって示しなさい．

8-3 例 8.8 の事実を次の不等式を用いて示しなさい：

$$\frac{1}{n} = \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\frac{1}{n} = \int_{n-1}^n \frac{1}{n} dx \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x} dx \quad (n = 2, 3, \dots).$$

8-4 次の級数の和を求めなさい．

(1)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

 ヒント：有理化

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

 ヒント： $\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ を考えよ．

8-5 実数 r に対して $a_n = nr^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とおく．

- (1) $|r| < 1$ のとき $\{a_n\}$ は 0 に収束することを示しなさい．
 ヒント： $|r| = 1/(1+h)$ ($h > 0$) とおいて $(1+h)^n \geq 1+nh + \frac{1}{2}n(n-1)h^2$ となることを用いる．
 (2) $|r| \geq 1$ のとき $\{a_n\}$ は発散することを示しなさい．
 (3) 部分和 $\sum_{k=0}^n a_k$ を求めなさい．
 ヒント：等比級数の有限項の和を求めたのと同様の方法を用いなさい．
 (4) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を求めなさい．

8-6 次の級数の収束，発散を調べなさい．ただし α は実数の定数である．

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$$

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$$