9. 絶対収束・条件収束

9.1 上極限・下極限

まず記号の準備：一般に数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して次のようにおく：

$$A_n := \{a_n, a_{n+1}, \dots\} = \{a_k \mid k \geqq n\} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{9.1}$$

$$a_n^+ := \sup A_n, \qquad a_n^- := \inf A_n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{9.2}$$

補題 9.1. (1) 数列 $\{a_n\}$ が上に非有界ならば，$a_n^+ = +\infty$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

(2) 数列 $\{a_n\}$ が上に有界ならば，$\{a_n^+\}$ は各項が実数の単調非増加数列.

(3) さらに数列 $\{a_n\}$ が下に有界，すなわち $\{a_n\}$ が有界ならば，$\{a_n^+\}$ は下に有界な単調非増加数列.

証明. (1): 番号 n を固定すると，$\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ は有限集合だから上に有界．ここで A_n が上に有界ならば，数列全体が上に有界になってしまう（式 (7.1)）のでこの集合は上に非有界．したがって $a_n^+ = +\infty$.

(2): $\{a_n\}$ が上に有界ならば，A_n も上に有界だから，上限 a_n^+ が存在する．さらに $A_n \supset A_{n+1}$ だから a_n^+ は A_{n+1} の上界となるので $a_{n+1}^+ \leqq a_n^+$ が成り立つ.

(3): さらに $\{a_n\}$ が下に有界ならば，その下限を α とすると $\alpha \leqq a_n$ が各 n に対して成り立つので，$a_n^+ \geqq \alpha$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$，すなわち $\{a_n^+\}$ は下に有界. □

同様の性質が $\{a_n^-\}$ に対しても成り立つ（演習問題 9-1）.

定義 9.2. 数列 $\{a_n\}$ が上に（下に）有界であるとき (9.2) で与えられる数列 $\{a_n^+\}$ ($\{a_n^-\}$) は収束するか $-\infty$（$+\infty$）に発散する（連続性の公理 5.12）．そこで

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} a_n^+, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} a_n^-$$

と定め，それぞれ $\{a_n\}$ の**上極限**，**下極限** とよぶ[1]．とくに $\{a_n\}$ が上下に有界なら，上極限・下極限はともに有限の値である．また $\{a_n\}$ が上に（下に）非有界なときは $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ($\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$) と定める.

[*] 2013 年 12 月 3 日

[1] 上極限：the limit superior; 下極限：the limit inferior. lim sup を $\overline{\lim}$，lim inf を $\underline{\lim}$ と表すこともある.

例 9.3. (1) 数列 $\{(-1)^n + \frac{1}{n}\}$ の上極限は 1，下極限は -1 である.

(2) 数列 $\{-n\}$ の上極限と下極限はともに $-\infty$ である. ◇

補題 9.4. 実数 α が数列 $\{a_n\}$ の上極限であるための必要十分条件は，

(1) 任意の正の数 ε に対して次をみたす番号 N が存在する：$n \geqq N$ なる任意の n に対して $a_n < \alpha + \varepsilon$.

(2) 任意の正の数 ε と任意の番号 N に対して $m \geqq N$ かつ $\alpha - \varepsilon < a_m$ をみたす番号 m が存在する.

証明．必要性：数列 $\{a_n^+\}$ を式 (9.2) により定めると α は a_n^+ の極限で，$\{a_n^+\}$ は単調非増加だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して「$n \geqq N$ ならば $0 \leqq a_n^+ - \alpha < \varepsilon$」が成り立つような番号 N が存在する．とくに $0 \leqq a_N^+ < \alpha + \varepsilon$ であるが，$n \geqq N$ のとき $a_n \leqq \sup A_N = a_N^+$ なので (1) が成り立つ.

一方，正の数 ε と番号 N を任意にとると，$a_N^+ = \sup A_N$ だから，$a_N^+ - \varepsilon \leqq x$ となる $x \in A_N$ が存在する（注意 7.7）．ここで A_N は (9.1) で定義されているから $x = a_m$ $(m \geqq N)$ となる m が存在するので，(2) が成り立つ.

十分性：実数 α が (1), (2) をみたしているとする．正の数 ε を任意にとると (1) から「$m \geqq N$ ならば $0 \leqq a_m^+ - \alpha < \varepsilon/2$」となる番号 N が存在する．この N に対して $n \geqq N$ をみたす番号 n を任意にとる．$a_n^+ = \sup A_n$ だから，注意 7.7 から $a_n - \varepsilon < a_m$ $(m \geqq n)$ をみたす番号 m が存在するので,

$$a_n^+ - \frac{\varepsilon}{2} < a_m \leqq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{すなわち} \qquad a_n^+ - \alpha < \varepsilon$$

を得る．一方，この n に対して (2) から $\alpha - \varepsilon < a_m$ $(m \geqq n)$ となる番号 m が存在する．ここで $a_m \in A_n$ だから $a_m \leqq a_n^+ = \sup A_n$．したがって

$$\alpha - \varepsilon < a_m \leqq a_n^+ \qquad \text{すなわち} \qquad \alpha - a_n^+ < \varepsilon$$

となるので，$|a_n^+ - \alpha| < \varepsilon$．正数 ε は任意，$n \geqq N$ も任意だったから，$a_n^+ \to \alpha$. □

補題 9.5. 数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は，その上極限と下極限が一致することで，そのとき，極限値は上下極限の値と一致する.

証明. 数列 $\{a_n\}$ の上極限を α，極限を β として，$\beta = \alpha$ を示す．正数 ε に対して，番号 N を「$n \geqq N$ ならば $a_n \leqq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$, $|a_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$」となるようにとる．このとき,

$$-\frac{\varepsilon}{2} < a_n - \beta \leqq \alpha - \beta + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{だから} \qquad -\varepsilon < \alpha - \beta.$$

また，この ε, N に対して $\alpha-\frac{\varepsilon}{2}<a_m$ となる $m \geqq N$ が存在するので，

$$\alpha-\beta-\frac{\varepsilon}{2}<a_m-\beta<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{だから} \qquad \alpha-\beta<\varepsilon.$$

したがって $|\alpha-\beta|<\varepsilon$ が任意の正の数 ε に対して成り立つ．とくに $\varepsilon=1/m$ (m は正の整数) として $m\to\infty$ とすれば $\alpha=\beta$ が得られる．同様に下極限も β と一致する．

逆に上極限と下極限が一致したとして，その値を α とすると，補題 9.4 の (1) とそれを下極限に書き換えたものを用いれば，任意の $\varepsilon>0$ に対して，次をみたす番号 N の存在がわかる：「任意の番号 $n \geqq N$ に対して $a_n \leqq \alpha+\frac{\varepsilon}{2}$, $\alpha-\frac{\varepsilon}{2} \leqq a_n$ が成り立つ」．この N に対して $n \geqq N$ なら $|a_n-\alpha| \leqq \frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ となるので $\{a_n\}$ は α に収束する．□

命題 9.6. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha>0, \qquad \limsup_{n\to\infty} b_n=\beta$$

をみたしているならば，

$$\limsup_{n\to\infty}(a_nb_n)=\alpha\beta.$$

証明. 数列 $\{a_nb_n\}$ に対して $\alpha\beta$ が補題 9.4 の二つの条件 (1), (2) をみたすことを示す．

(1): 与えられた正の数 ε に対して，$\varepsilon'=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2(\alpha+|\beta|)}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right\}$ とおく．このとき，

- $a_n\to\alpha$ であることから,「$n \geqq N_1$ ならば $|a_n-\alpha|<\varepsilon'$」をみたす番号 N_1 が存在する．
- $\beta=\limsup_{n\to\infty}$ だから，補題 9.4 の (1) から「$n \geqq N_2$ ならば $b_n<\beta+\varepsilon'$」をみたす番号 N_2 が存在する．

そこで $N=\max\{N_1,N_2\}$ とすれば $n \geqq N$ なる n に対して

$$a_nb_n<(\alpha+\varepsilon')(\beta+\varepsilon')=\alpha\beta+(\alpha+\beta)\varepsilon'+\varepsilon'^2 \leqq \alpha\beta+(\alpha+|\beta|)\varepsilon'+\varepsilon'^2 \leqq \alpha\beta+\varepsilon.$$

(2): 与えられた正の数 ε に対して $\varepsilon''=\min\left\{\frac{\varepsilon}{4\alpha}, \frac{\varepsilon}{2|\beta|}, \alpha\right\}$ とおくと,「$n \geqq N_3$ ならば $|a_n-\alpha|<\varepsilon''$」をみたす番号 N_3 が存在する．いま，番号 N を任意にとると，補題 9.4 の (2) から，$m \geqq \max\{N,N_3\}$ をみたす番号 m で $\beta-\varepsilon''<b_m$ となるものが存在する．このとき $\alpha\beta-\varepsilon<a_mb_m$ を示せば良い．実際，$\alpha>0$ に注意すれば

$$\begin{aligned}a_mb_m-\alpha\beta+\varepsilon &\geqq a_m(\beta-\varepsilon'')-\alpha\beta+\varepsilon \geqq (a_m-\alpha)\beta-a_m\varepsilon''+\varepsilon\\ &\geqq -|a_m-\alpha|\,|\beta|-(\alpha+\varepsilon'')\varepsilon''+\varepsilon'' \geqq -\varepsilon''|\beta|-2\alpha\varepsilon''+\varepsilon>0.\end{aligned}$$

□

9.2 コーシーの収束条件

上極限，下極限を用いて，実数の連続性のもう一つの表現を与える：

定義 9.7. 数列 $\{p_n\}$ が**コーシー列**[2] であるとは，任意の正の数 ε に対して，次をみたす番号 N が存在することである：

$$m,\ n \geqq N \text{ をみたす任意の番号 } m,\ n \text{ に対して } |p_m-p_n|<\varepsilon.$$

補題 9.8. 収束する数列はコーシー列である．

証明. 数列 $\{p_n\}$ が p に収束すると仮定する．このとき，任意の正の数 ε をとれば,「$n \geqq N$ ならば $|p_n-p|<\frac{\varepsilon}{2}$」となる番号 N をとることができる．この N に対して $m,\ n \geqq N$ に対して

$$|p_m-p_n|=|(p_m-p)-(p_n-p)| \leqq |p_m-p|+|p_n-p|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

となるので，$\{p_n\}$ はコーシー列である．□

補題 9.9. コーシー列は上・下に有界である．

証明. コーシー列 $\{p_n\}$ をとると（定義 9.7 で $\varepsilon=1$ として）「$m,\ n \geqq N$ ならば $|p_m-p_n|<1$」となる番号 N が存在する．とくに $m=N$ として「$n \geqq N$ ならば $|p_n-p_N|<1$」が成り立つ．したがって，任意の k に対して

$$|p_k| \leqq M \qquad (M=\max\{|p_0|,|p_1|,\dots,|p_{N-1}|,|p_N|+1\})$$

が成り立つ．□

定理 9.10 (コーシーの収束条件)**.** コーシー列は収束する．

注意 9.11. 定理 9.10 は実数の連続性の一つの表現である．実際，すべての項が有理数となるコーシー列で，無理数に収束するものが存在する（問題 9-2）．

定理 9.10 の証明. 数列 $\{p_n\}$ がコーシー列ならば，補題 9.9 より有界なので，上極限・下極限が存在する．そこで

$$\alpha_-:=\liminf_{n\to\infty} p_n, \qquad \alpha_+:=\limsup_{n\to\infty} p_n$$

[2] コーシー列：a Cauchy sequence.

とおく．コーシー列の定義から，任意の正の整数 k に対して「$m,\ n \geqq N_1$ ならば $|p_m - p_n| < 1/(3k)$」をみたす番号 N_1 が存在する．

また，α_+ が上極限であることから，補題 9.4 から,「$n \geqq N_2$ なら $p_n < \alpha_+ + 1/(3k)$」が成り立つような番号 N_2 が存在し，さらに「$m \geqq N_2$ かつ $\alpha_+ - 1/(3k) < p_m$」となる m が存在する．

同様に，α_- が下極限であることから,「$n \geqq N_3$ なら $p_n > \alpha_- - 1/(3k)$」が成り立つような番号 N_3 が存在し，さらに「$m' \geqq N_3$ かつ $\alpha_- + 1/(3k) > p_{m'}$」となる m' が存在する．

そこで $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ とおくと，$m,\ m' \geqq N$ をみたす番号 $m,\ m'$ で

$$\alpha_+ - \frac{1}{3k} < p_m < \alpha_+ + \frac{1}{3k}, \qquad \alpha_- - \frac{1}{3k} < p_{m'} < \alpha_- + \frac{1}{3k}$$

をみたすものが存在する．ここで $|p_m - p_{m'}| < 1/(3k)$ に注意すれば

$$|\alpha_+ - \alpha_-| < \frac{1}{k}$$

が得られるが，k は任意なので $k \to \infty$ とすることで $\alpha_+ = \alpha_-$ を得る．このことと補題 9.5 から $\{p_n\}$ は収束する． □

系 9.12. 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は，任意の正の数 ε に対して，次のような番号 N が存在することである：

$$n \geqq N \text{ なる任意の番号 } n \text{ と任意の正の整数 } m \text{ に対して} \quad \left|\sum_{k=n}^{n+m} a_k\right| < \varepsilon.$$

証明． これは部分和 (8.2) からなる数列がコーシー列となることと同値である． □

9.3 絶対収束

定義 9.13. 級数の各項に絶対値をつけることによって得られる級数を与えられた級数の**絶対値級数**とよぼう：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{の絶対値級数は} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \qquad \text{である．}$$

級数の絶対値級数が収束するとき，もとの級数は**絶対収束**する[3]という．

[3] 絶対収束：absolute convergence; 絶対収束する：to converge absolutely. 絶対収束性の定義にはもとの級数が収束することは含まれていないが定理 9.14 から，絶対収束性は収束性を導く．

定理 9.14. 絶対収束する級数は収束する．

証明． 級数 $\sum |a_n|$ が収束するならば，系 9.12 から，次をみたす番号 N が存在する：

$$n \geqq N \quad \text{ならば，任意の正の整数 } m \text{ に対して} \quad \sum_{k=n}^{n+m} |a_k| < \varepsilon.$$

この N に対して $n \geqq N$ とすると，

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} a_k\right| \leqq \sum_{k=n}^{n+m} |a_k| < \varepsilon.$$

であるから，系 9.12 から $\sum a_n$ も収束する． □

注意 9.15. 級数 $\sum a_n$ が絶対収束するならば，

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

が成り立つが，右辺の和がわかったとしても左辺の値がわかるとは限らない．

系 9.16. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が，ある番号 N 以降の項に対して

$$|a_n| \leqq b_n \qquad (n \geqq N)$$

をみたしているとする．このとき，級数 $\sum b_n$ が収束するならば級数 $\sum a_n$ は絶対収束する．とくに，この級数は収束する．

証明． 級数 $\sum |a_n|$ は正項級数だから，命題 8.6 より結論が得られる[4]． □

例 9.17. 数列 $\{a_n\}$ のある番号 N 以降の項が $|a_n| \leqq cr^n$（c，r は正の定数で $0 < r < 1$）ならば，級数 $\sum a_n$ は絶対収束する（例 8.5 参照）． ◇

例 9.18. 数列 $\{a_n\}$ のある番号 N 以降の項が $|a_n| \leqq cn^p$（$c > 0$，$p < -1$）ならば，級数 $\sum a_n$ は絶対収束する（例 8.8 参照）． ◇

上極限を用いて正項級数の収束判定条件を与えよう．これは，第 10 回の冪級数の収束半径の議論で重要となる：

[4] 命題 8.6 では，すべての項の大小関係が仮定されているが，最初の有限の項を変更しても級数が収束するという性質は不変なので，系 9.16 のような仮定で十分である．

定理 9.19. 数列 $\{a_n\}$ に対して $\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ とおくと

(1) $\alpha < 1$ なら級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束する．

(2) $\alpha > 1$ なら級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する．

証明． まず $0 \leqq \alpha < 1$ として，二つの正の数

$$\varepsilon := \frac{1-\alpha}{2} > 0, \qquad r := \frac{1+\alpha}{2} < 1$$

をとると，上極限の条件（補題 9.4 (1)）から「$n \geqq N$ ならば $\sqrt[n]{|a_n|} \leqq \alpha + \varepsilon = r$」となる N が存在する．このとき $|a_n| \leqq r^n$ だから，例 9.17 により $\sum a_n$ は絶対収束．

一方，$\alpha > 1$ の場合は，$\varepsilon = (\alpha-1)/2 > 0$, $r = (1+\alpha)/2 > 1$ とする．このとき，任意の正の整数 N に対して $n \geqq N$ かつ $\sqrt[n]{|a_n|} > \alpha - \varepsilon = r$ となる番号 n が存在する．このとき $|a_n| > r > 1$ だから，a_n は 0 に収束しない（例 6.15 参照）．したがって，定理 8.2 から $\sum a_n$ は発散する． □

注意 9.20. 定理 9.19 で $\alpha = 1$ の場合は判定できない．実際，例 8.8 の級数はすべて $\alpha = 1$ となるが，収束する場合も発散する場合もある．

級数のすべての項が 0 でないときは問題 9-3 のような収束判定条件もある．

9.4 条件収束

収束する級数が絶対収束していないとき，その級数は**条件収束**する[5)]という．

例 9.21. 例 8.10 の級数の収束は条件収束である． ◇

注意 9.22. 絶対収束する級数の和は，だいたい有限の和と同じように扱ってよい．一方，条件収束する級数は複雑な挙動を示す．たとえば

- 絶対収束する級数は，その項を任意に入れかえても同じ和に収束する．
- 条件収束する級数は，項の順番をうまく入れ替えることによって，任意の値に収束させせることができる．

証明は難しくないが，ここでは深入りしない．

[5)] 条件収束：conditional convergence; 条件収束する：to converge conditionally.

問　題　9

9-1 補題 9.1 に対応する $\{a_n^-\}$ の性質を書きなさい．

9-2 すべての項が有理数となるコーシー列で，無理数に収束するものを挙げなさい．

9-3 数列 $\{a_n\}$ のすべての項が 0 ではなく，極限値

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

が存在するとき，

- $\alpha < 1$ のとき級数 $\sum a_n$ は絶対収束する．
- $\alpha > 1$ のとき級数 $\sum a_n$ は発散する．

$r = 1$ の場合はどうか．

9-4 次の級数は $|r| < 1$ のとき絶対収束，$|r| > 1$ のとき発散する．そのことを確かめなさい：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^p r^n$．ただし p は任意の実数．

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} r^n$．ただし α は任意の実数．

さらに $r = 1$, $r = -1$ の場合はどうなるか．