1. 平均値の定理

前期は主に多変数関数を扱ったが，後期は高等学校で学んだ一変数関数を再び扱う．今回は主に高等学校で学んだこと（ではあるがあまり定着していなさそうなこと）の復習である．

1.1 復習：連続性と微分可能性

数直線上の区間 I で[1] 定義された（一変数）関数 f が[2] 点 $a \in I$ で**連続**[3] であるとは，

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \tag{1.1}$$

が成り立つことである．とくに，a が閉区間の左端（右端）のときは，(1.1) の左辺の極限は，**右極限**（**左極限**）とする[4][5]：

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) \qquad \Bigl(\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)\Bigr).$$

とくに，区間 I の各点で連続な関数 f を**区間 I で連続な関数**，**I 上の連続関数**，**I 上で定義された連続関数**などという．

区間 I で定義された関数 f が I 上の点 a で**微分可能**[6]であるとは，極限値

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が存在することである．この値を f の a における**微分係数**といって $f'(a)$ で表す．区間 I の各点で微分可能な関数は **区間 I で微分可能である**といわれる．次の定理が成り立つ[7]．

[*] 2013 年 10 月 8 日

[1] 区間 an interval; 開 (閉) 区間 an open (a closed) interval.

[2] 関数 a function.

[3] 連続 continuous; 連続関数 a continuous function.

[4] 極限 limit; 右極限 right-hand limit; 左極限 left-hand limit.

[5] 極限の定義は第 6 回で扱う．ここでは「どんどん近づく」という理解でよい．

[6] 微分可能 differentiable; 微分係数 the differential coefficient; 導関数 the derivative.

[7] 定理 a theorem; 系 a corollary; 命題 a proposition; 補題 a lemma; 証明 a proof.

定理 1.1. 関数 f が a で微分可能なら，f は a で連続である．

証明． 二つの関数 F, G が

$$\lim_{x\to a} F(x) = \alpha, \qquad \lim_{x\to a} G(x) = \beta$$

をみたしているならば，

$$\lim_{x\to a}\bigl(F(x) \pm G(x)\bigr) = \alpha \pm \beta, \qquad \lim_{x\to a}\bigl(F(x)G(x)\bigr) = \alpha\beta$$

が成り立つこと（極限の公式）を用いる[8]．実際，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\bigl(f(x)-f(a)\bigr) &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right)\\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\lim_{x\to a}(x-a) = f'(a)\times 0 = 0.\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\bigl(f(x)-f(a)+f(a)\bigr)\\ &= \lim_{x\to a}\bigl(f(x)-f(a)\bigr) + \lim_{x\to a} f(a) = 0 + f(a) = f(a)\end{aligned}$$

が成り立つ． □

注意 1.2. 定理 1.1 の逆は成り立たない．実際，

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \qquad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

はともに実数全体で定義された連続関数であるが，0 で微分可能でない．関数 f のグラフは 0 で角をもつが，g のグラフはなめらかな曲線であることに注意しよう．

区間 I で微分可能な関数 f が与えられたとき，I の各点 x に対して x における f の微分係数 $f'(x)$ を対応させる関数 $f'\colon I \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$ を考えることができる．これを f の**導関数**という．

[8] これは証明が必要な事実であるが，そのためには極限の定義を明確にする必要がある．第 5 回で扱う．

例 1.3. 区間 I で微分可能な関数 f の導関数は，連続とは限らない．実際，次の関数を考えよう：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

すると f は微分可能で，その導関数は

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \dfrac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$$

となる．とくに $x_n = 1/(2n\pi)$ $(n = 0, 1, \dots)$ とすると，$x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ であるが，$f(x_n) = -\frac{1}{2}$ なので

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = -\frac{1}{2} \neq f'(0).$$

したがって f' は 0 で連続でない． ♢

とくに，区間 I で微分可能，かつ導関数が I で連続となる関数を C^1**-級**[9] という．C^1-級であることは，微分可能であることより強い性質である．

1.2 平均値の定理

微積分学でもっとも重要な定理の一つが**平均値の定理** the mean value theorem である．

定理 1.4 (平均値の定理)**.** 閉区間 $[a, b]$ で定義された（一変数）連続関数 f が，開区間 (a, b) では微分可能であるとする．このとき，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \qquad a < c < b$$

をみたす c が少なくとも一つ存在する．

平均値の定理の証明は第 2 回に与える．

微分可能な関数は連続であることに注意すれば，定理 1.4 から次の系がただちに従う：

[9] C^1-級 of class C^1 (c-one).

系 1.5. 一変数関数 f が a と $a + h$ を含む区間で微分可能であるとする．このとき，

$$f(a + h) = f(a) + f'(a + \theta h)h \qquad 0 < \theta < 1$$

をみたす θ が少なくとも一つ存在する．

証明． まず $h = 0$ の場合はどんな θ をとっても結論の式が成り立つ．

次に $h > 0$ の場合，f は $[a, a + h]$ で微分可能であるから，定理 1.1 よりとくに連続．したがって，定理 1.4 を $b = a + h$ として適用すると

$$f(a + h) = f(a) + f'(c)h \qquad a < c < a + h$$

をみたす c が少なくとも存在する．ここで $\theta = (c - a)/h$ とおけば $a < c < a + h$ から $0 < \theta < 1$ が得られる．

最後に $h < 0$ の場合は，区間 $[a + h, a]$ に対して平均値の定理 1.4 を適用すれば

$$\frac{f(a) - f(a + h)}{a - (a + h)} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(c) \qquad a + h < c < a$$

をみたす c が存在する．ここで $h < 0$ に注意すれば $c = a + \theta h$ $(0 < \theta < 1)$ と表されることがわかる． □

1.3 平均値の定理の応用

関数の近似値

例 1.6. 平方根[10] $\sqrt{10}$ の近似値[11]を求めよう．関数 $f(x) = \sqrt{x}$，$a = 9$，$b = 10$ に対して定理 1.4 を適用すると

$$\frac{\sqrt{10} - \sqrt{9}}{10 - 9} = \frac{1}{2\sqrt{c}}, \qquad 9 < c < 10$$

をみたす c が存在する．この式を整理すると

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{2\sqrt{c}}, \qquad 9 < c < 10.$$

[10] 平方根 the square root.

[11] 近似値 an approximation.

とくに $c>9$ だから

$$\sqrt{10}<3+\frac{1}{2\sqrt{9}}=3+\frac{1}{6}<3.17.$$

一方，$c<10$ だから，上の式を用いて

$$\sqrt{10}>3+\frac{1}{2\sqrt{10}}>3+\frac{1}{2\left(3+\frac{1}{6}\right)}=3+\frac{3}{19}>3+\frac{3}{20}=3.15.$$

以上から

$$3.15<\sqrt{10}<3.17$$

が得られた．とくに $\sqrt{10}$ を **10 進小数**[12] で表したとき，小数第一位は 1, 小数第二位は 5 または 6 であることがわかる． ♢

関数の値の変化

定理 1.7. 区間 I で定義された微分可能な関数が，I 上で $f'(x)=0$ をみたしているならば，f は I で定数である．

証明. 区間 I 上の点 a をとり固定する．この a とはことなる任意の I の点 x に対して $f(x)=f(a)$ であることを示せばよい．いま $x>a$ のときは，区間 $[a,x]$ に平均値の定理 1.4 を適用すると，

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c), \qquad a<c<x$$

をみたす c が存在することがわかる．ここで a, x はともに区間 I の点だから c も I の点である．したがって仮定から $f'(c)=0$ なので $f(x)=f(a)$ を得る．一方，$x<a$ のときは区間 $[x,a]$ に関して同様の議論をすればよい． □

注意 1.8. 一般に，点 a を含む開区間で定数であるような関数 f に対して $f'(a)=0$ が成り立つことが，微分係数を定義通りに計算すればわかる．

系 1.9. 区間 I で定義された微分可能な関数 F, G がともに連続関数 f の原始関数[13]ならば $G(x)=F(x)+C$ (C は定数) と書ける．

[12] 10 進小数 a decimal fraction; 小数第一位 the first decimal place.
[13] 原始関数 a primitive; 定数 a constant.

証明. 二つの関数 F, G はともに f の原始関数だから $F'(x)=G'(x)=f(x)$．したがって，関数 $H(x)=G(x)-F(x)$ は区間 I 上で $H'(x)=0$ をみたすから，定理 1.7 より区間 I 上で定数である．co □

注意 1.10. 関数 F, G の定義域 I が区間でなければ系 1.9 は成り立たない．実際，$\mathbb{R}\setminus\{0\}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq 0\}$ 上で[14]定義された二つの関数

$$F(x)=\log|x|, \qquad G(x)=\begin{cases}\log x & (x>0)\\ \log(-x)+7 & (x<0)\end{cases}$$

はともに $f(x)=1/x$ の原始関数であるが，差は定数でない．

関数の増減

定理 1.11. 区間 (a,b) で定義された微分可能な関数 f の導関数 が (a,b) で正 (負) の値をとるならば，f は (a,b) で単調増加 (減少) である[15]．

証明. 区間 (a,b) から二つの数 x_1, x_2 を $x_1<x_2$ をみたすようにとる．このとき，区間 $[x_1,x_2]$ に対して定理 1.4 を適用すれば

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c) \qquad (a<)x_1<c<x_2(<b)$$

をみたす c が存在することがわかる．仮定より $f'(c)>0$ ($f'(c)<0$) なので，$x_2-x_1>0$ であることと合わせて

$$f(x_2)-f(x_1)>0 \qquad \bigl(f(x_2)-f(x_1)<0\bigr)$$

が得られる．すなわち $x_1<x_2$ ならば $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$) が成り立つことがわかるので，f は単調増加 (減少)． □

注意 1.12. 微分可能な関数 f の導関数 f' が連続である[16]とき，f の定義域の内点 c で[17] $f'(c)>0$ ならば，c を含む開区間 I で，f が I 上で単調増加となるものが存在する．実際，f' が連続かつ $f'(c)>0$ ならば c を含む開

[14] 記号 $A\setminus B$ は，集合 A から集合 B の要素をすべて取り去ってできる集合を表す：$A\setminus B=\{x\,|\,x\in A$ かつ $x\notin B\}$．これを $A-B$ と書くこともある．
[15] 単調増加 (減少) monotone increasing (decreasing); 正 positive; 負 negative.
[16] すなわち C^1-級．
[17] すなわち c を含むある開区間が f の定義域に含まれるような点．

区間 I で $f'(x)>0$ が I 上で成り立つものが存在する (この事実は第 6 回講義にて説明する).

例 1.13. 一般に，微分可能な関数 f の定義域の一点 c で $f'(c)>0$ だからといって，c を含むある開区間で f が単調増加であるとは限らない．実際，例 1.3 の関数 f は $f'(0)=1/2>0$ をみたしている．ここで，$x=0$ を含む開区間 I を一つ与え，$\xi=1/(2m\pi)$ が I に含まれるように十分大きい番号 m をとると，$f'(\xi)=-\frac{1}{2}<0$ である．f' は $x\neq 0$ では連続だから ξ を含む区間 J で $f'(x)<0$ $(x\in J)$ となるものが存在する．したがって，共通部分 $I\cap J$ で f は単調減少である．一方，$\eta=1/\bigl((2m+1)\pi\bigr)$ が I に含まれるように十分大きい番号 m をとると，$f'(\eta)=\frac{3}{2}>0$ なので区間 J' で $f'(x)>0$ $(x\in J)$ となるものが存在する．このとき，共通部分 $I\cap J'$ で f は単調増加である．すなわち，0 を含む任意の開区間は f が単調減少であるような区間と単調増加である区間を含む. ♢

問　題　1

1-1 平均値の定理 1.4 の状況を絵に描きなさい.

1-2 平均値の定理を用いて $\sqrt{5}$ の近似値が 2.2 (小数第一位の数字は 2) であることを示しなさい.

1-3 平均値の定理を用いて，$\sin 0.1$, $\tan 0.1$ の近似値を求めなさい（0.1 radian は何度くらいか?）．ただし，答えは確定した桁の数字だけを書くこと（上の問い参照）.

1-4 工太郎君は，午前 10 時に東名高速道路の東京 IC (東京都世田谷区) を自動車で通過し，346.8Km 先の小牧 IC (愛知県小牧市) に同じ日の午後 1 時についた. 彼がスピード違反をした瞬間が存在することを証明しなさい.（注：日本の高速道路の制限スピードは，区間・天候などによるが，時速 100Km を超えることはない.）

1-5 定理 1.1 の証明の中の等式変形の一つひとつの等号が成り立つ理由を考えなさい.

1-6 関数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$$

は C^1-級であることを示しなさい.

2. 平均値の定理とテイラーの定理

2.1 平均値の定理の証明

平均値の定理 1.4 を示すには，次の連続関数の性質 (第 8 回講義で扱う予定; ここでは証明を与えない) を用いる：

定理 2.1 (最大・最小値の定理)**.** 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 f は，区間 $[a,b]$ で最大値・最小値をもつ．

ここで，区間 I で定義された関数 f が $c \in I$ で**最大値** (**最小値**) をとる[1)]，とは任意の $x \in I$ に対して $f(x) \leqq f(c)$ ($f(x) \geqq f(c)$) が成り立つことである．関数 f が区間 I で**最大値** (**最小値**) をとるとは，上のような $c \in I$ が存在することである．

注意 2.2. 上の定義における c は定義域 I に含まれていることに注意しよう．たとえば $\mathbb{R}$ 全体で定義された関数 $f(x) = \tan^{-1} x$ は，すべての実数 x に対して $f(x) \leqq \pi/2$ をみたしているが $f(c) = \pi/2$ となる実数 c は存在しないので，最大値をとるとはいえない．

注意 2.3. 定理 2.1 は (第 8 回にのべる中間値の定理と同様) よく考えないとあたり前の定理であるが，実数の連続性[2)]（第 7 回）と深く関わっている．実際，定義域を有理数に限って，$f(x) = 4x^2 - x^4$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ を考えると，これは $0 \leqq x \leqq 2$ 上で (定義域を有理数に限っても) 連続な関数だが，最大値をとらない．もちろん，同じ関数を，$\mathbb{R}$ の区間 $[0,2]$ 上で定義された連続関数と考えれば $x = \sqrt{2}$ で最大値をとる．

区間 I の点 c が I の**内点**[3)]であるとは，c 含む開区間で I に含まれるものが存在することをいう．たとえば閉区間 $I = [a,b]$ に対して $c \in (a,b)$ は I の内点であるが，a, b は I の内点ではない．

[*)]2013 年 10 月 15 日 (2013 年 10 月 22 日訂正)
[1)]最大値 the maximum; 最小値 the minimum.
[2)]実数 a real number; 実数の連続性 continuity of real numbers; 有理数 a rational number.
[3)]内点 an interior point

補題 2.4. 区間 I で定義された関数 f が I の内点 c で最大値または最小値をとるとする．さらに f が c で微分可能ならば $f'(c) = 0$ が成り立つ．

証明. 点 c は I の内点だから十分小さい正の数 δ をとれば，開区間 $(c-\delta, c+\delta)$ は I に含まれる．いま f は c で微分可能だから，極限値

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在する．とくに f が c で最大値をとるならば，$f(c+h) - f(c) \leqq 0$ なので

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \begin{cases} \leqq 0 & (h > 0 \text{ のとき}) \\ \geqq 0 & (h < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるので，h を 0 に近づけた時の極限値 $f'(c)$ は 0 でなければならない．最小値の場合も同様である[4)]． □

補題 2.5 (ロル[5)]の定理)**.** 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 F が開区間 (a,b) で微分可能，かつ $F(a) = F(b)$ をみたしているならば，

$$F'(c) = 0, \qquad a < c < b$$

をみたす c が少なくとも一つ存在する．

証明. 関数 F は $[a,b]$ で連続だから，定理 2.1 から c_1, $c_2 \in [a,b]$ で F は c_1 で最大値をとり，c_2 で最小値をとるようなものが存在する．もし c_1, c_2 がともに a, b いずれかの値をとるならば，仮定から $F(c_1) = F(c_2)$ となって，最大値と最小値が一致する．このとき F は定数関数となるので，区間 (a,b) で $F' = 0$ となり結論が得られる．そうでない場合は c_1, c_2 の少なくとも一方が開区間 (a,b) に含まれるので，それを c とおけば補題 2.4 より $F'(c) = 0$. □

平均値の定理 1.4 **の証明.** 関数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

に対してロルの定理 (補題 2.5) を適用すればよい（問題 2-2）. □

[4)]“同様である” と書いて証明が省略されていたら，それが本当か自分で確かめてみよう.
[5)]Michel Rolle (1652-1719; Fr); ロルの定理 Rolle's theorem.

定理 2.6 (コーシー[6]の平均値の定理). 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 f, g がともに (a,b) で微分可能, $g(a)\neq g(b)$ をみたし, 区間 (a,b) 上で $g'(x)\neq 0$ であるとする. このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\qquad a<c<b$$

をみたす c が少なくともひとつ存在する.

証明. 関数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\bigl(g(x)-g(a)\bigr)$$

に対してロルの定理 (補題 2.5) を適用すればよい（問題 2-2）. □

2.2 高階の導関数

区間 $I\subset\mathbb{R}$ で定義された微分可能な関数 f の導関数 f' が微分可能であるとき, f は 2 階 (2 回) 微分可能である, といい, f' の導関数 f'' を f の **2 次導関数**[7]という. 一般に正の整数 $k\geqq 2$ に対して, k 階微分可能性, k 次導関数が次のように帰納的に定義される：

> 区間 I で定義された関数 f が $(k-1)$ 階微分可能であり, $(k-1)$ 次導関数が微分可能であるとき, f は k 階微分可能であるといい, $(k-1)$ 次導関数の導関数を k 次導関数とよぶ.

関数 f の k 次導関数を

$$f^{(k)}(x),\qquad \frac{d^k}{dx^k}f(x),\qquad \frac{d^ky}{dx^k}$$

などと書く. 最後の表記は $y=f(x)$ のように従属変数を y と表した時に用いられる.

例 2.7. (1) 正の整数 n に対して $f(x)=x^n$ とすると, $f^{(k)}(x)=k!x^{n-k}$ ($k\leqq n$ のとき), $f^{(k)}(x)=0$ ($k>n$ のとき) である. ここで $k=n$ のとき $f^{(n)}(x)=n!x^0$ は定数関数 $n!$ とみなしている.

[6] Augustin Louis Cauchy (1789–1857, Fr); これに対して, 平均値の定理 1.4 を**ラグランジュの平均値の定理**ということがある; Joseph-Louis Lagrange (1736–1813, It).

[7] 2 次導関数 the second derivative; k 次導関数 the k-th derivative.

(2) $f(x)=e^x$ ならば, 任意の負でない整数 k に対して $f^{(k)}(x)=e^x$.

(3) $f(x)=\cos x$ ならば, 任意の負でない整数 k に対して $f^{(2k)}(x)=(-1)^k\cos x$, $f^{(2k+1)}(x)=(-1)^{k+1}\sin x$ である. とくに, 負でない整数 m に対して $f^{(m)}(x)=\cos(x+\frac{m\pi}{2})$ である. ◇

定義 2.8.

- 区間 I で定義された関数 f が I で連続であるとき f は C^0-級であるという.
- 区間 I で定義された微分可能な関数 f の導関数が連続であるとき f は **1 階連続微分可能**または C^1-級であるという.
- 区間 I で定義された k 階微分可能な関数 f の k 次導関数が連続であるとき f は k **階連続微分可能**または C^k-級であるという.
- 任意の正の整数 k に対して C^k-級であるような関数を C^∞-級という.

2.3 テイラーの定理

定理 2.9 (テイラー[8]の定理). 関数 f が a を含む開区間 I で $(n+1)$ 回微分可能ならば, $a+h\in I$ となる h に対して

$$\begin{aligned}f(a+h)&\\&=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a)h^2+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n+R_{n+1}(h)\\&=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}f^{(j)}(a)h^j+R_{n+1}(h),\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$R_{n+1}(h)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h),\quad 0<\theta<1$$

をみたす θ が少なくともひとつ存在する[9].

[8] Sir Brook Taylor (1685–1731, En)

[9] 式 (2.1) の総和記号の $k=0$ の項において h^0 は $h=0$ のときも 1 であると約束しておく.

証明． 区間 $[0,1]$ で定義された関数

$$F(t) := \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a+th)}{k!}(1-t)^k h^k\right) + (1-t)^{n+1}\left(f(a+h) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k\right)$$

は微分可能で $F(0) = F(1) = f(a+h)$ をみたしている．これにロルの定理 (補題 2.5) を適用すればよい (問題 2-6)．□

例 2.10. 再び $\sqrt{10}$ の近似値を求めよう．関数 $f(x) = \sqrt{x}$ に $a = 9$, $h = 1$, $n = 1$ としてテイラーの定理 2.9 を適用すると，

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{9+\theta}^3}, \qquad 0 < \theta < 1$$

をみたす θ が存在することがわかる．とくに，$\theta \in (0,1)$ だから

$$\begin{aligned}
\sqrt{10} &\leqq 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8\sqrt{10}^3} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{80\sqrt{10}} \\
&\leqq 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{80\sqrt{16}} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{320} \\
&\leqq 3 + \frac{1}{6} - \frac{3}{1000} = 3 + \frac{1}{6} - 0.003 \leqq 3.16366\ldots \leqq 3.164 \\
\sqrt{10} &\geqq 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8\sqrt{9}^3} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8\times 27} \\
&\geqq 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8\times 25} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{200} = 3 + \frac{1}{6} - 0.005 \geqq 3.161
\end{aligned}$$

となるので

$$3.161 \leqq \sqrt{10} \leqq 3.164$$

が成り立つ．とくに $\sqrt{10} = 3.16\ldots$ (小数第二位まで正しい)．この場合，テイラーの定理 2.9 の次数 n を 3, 4,... とあげていくと，近似の精度がよくなる（問題 2-8）．◇

問　題　2

2-1 定理 2.1 の仮定が必要であることを，次のようにして示しなさい：

- 開区間 $(0,1)$ で定義された連続関数で，最大値をもつが最小値をもたないものの例を挙げなさい．
- 開区間 $(0,1)$ で定義された連続関数で，最大値も最小値ももたないものの例を挙げなさい．
- 閉区間 $[0,1]$ で定義された (連続とは限らない) 関数で，最大値も最小値ももたないものの例を挙げなさい．

2-2 平均値の定理の証明 (10 ページ) を完成させなさい．同様に，コーシーの平均値の定理 2.6 の証明を完成させなさい．

2-3 次のコーシーの平均値の定理 2.6 の証明の**誤り**を指摘しなさい：関数 f, g に平均値の定理 1.4 を適用すると

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \qquad \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c)$$

をみたす $c \in (a,b)$ が存在することがわかる．この第一の等式を第二の等式で割ると，結論が得られる．

2-4 コーシーの平均値の定理を用いて，次を示しなさい (ロピタル[10]の定理の特別な場合)：

> 関数 $f(x)$, $g(x)$ が区間 $[a, a+h)$ で連続，かつ $(a, a+h)$ で微分可能であるとする．さらに $f(a) = g(a) = 0$, かつ極限値
>
> $$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
>
> が存在するならば，極限値
>
> $$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}$$
>
> も存在して，両者は等しい．

2-5 次の極限値を求めなさい．

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\tan x - x}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{5^x - 3^x}{x^2}$.

[10] Guillaume Francois Antoine, Marquis de l'Hôpital, 1661–1704, Fr); l'Hospital とも書かれる．

2-6 テイラーの定理 2.9 の証明を完成させなさい.

2-7 次の場合に，式 (2.1) を具体的に書きなさい.

- $f(x)=\sqrt{x}$, $a=1$, $n=2$.
- $f(x)=e^x$, $a=0$, $n=2$; n は一般の自然数.
- $f(x)=e^x$, a は一般の実数, n は一般の自然数.
- $f(x)=\cos x$, $a=0$, $n=2$; $n=2k-1$ (k は正の整数).
- $f(x)=\sin x$, $a=0$, $n=3$; $n=2k$ (k は正の整数).
- $f(x)=\tan x$, $a=0$, $n=3$.
- $f(x)=\tan^{-1} x$, $a=0$, $n=4$; n は一般の自然数.
- $f(x)=\log(1+x)$, $a=0$, $n=3$; n は一般の自然数.
- $f(x)=(1+x)^\alpha$, $a=0$, $n=3$; n は一般の自然数．ただし α は実数.

2-8 例 2.10 の n を 3 にして $\sqrt{10}$ の近似値を求めなさい．小数第何位まで求まるか.

2-9 $\sqrt{1.1}$ の近似値を求めよう.

- 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ に $a=1$, $h=0.1$, $n=2$ としてテイラーの定理 2.9 を書きなさい.
- このとき，$R_3(h)$ 以外の項の総和はいくつか.
- $R_3(h)$ の大きさを不等式で評価することによって，$\sqrt{1.1}$ の値を求めなさい.
- 同じことを $n=3$ として試みなさい.

2-10* 地球 (半径 $R=6.4\times10^6$ メートルの正確な球と仮定する) の赤道の周囲にゴムひもを巻き，その 1 箇所をつまんで 1 メートル持ち上げるとき，ゴムひもの伸びは

$$2\left(\sqrt{2R+1}-R\tan^{-1}\frac{\sqrt{2R+1}}{R}\right)$$

で与えられる．この値の近似値を手計算で求めなさい.

3. テイラーの定理 2

3.1 テイラーの定理の剰余項

前回挙げたテイラーの定理 2.9 における $R_{n+1}(h)$ のことを**剰余項**[1]という．とくに (2.1) のように表された $R_{n+1}(h)$ のことをラグランジュ[2]の剰余項とよぶことがある．

例 2.10 や，問題 2-8, 2-9 などの例でみるように，ある状況では剰余項の値が十分小さいことが期待される．ある意味でこのことを述べたのが次のようなテイラーの定理の書き換えである：

定理 3.1 (テイラーの定理 2)**.** 関数 $f(x)$ は a を含む開区間で C^{n+1}-級とする．このとき，

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n+R_{n+1}(h) \tag{3.1}$$

とおくと $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{R_{n+1}(h)}{h^n}=0$

が成り立つ．

注意 3.2. 定理 2.9 では h は与えられた定数であったが，定理 3.1 の h は 0 に近い値をとる変数で，$h\to 0$ という極限における性質が定理の結論である．

定理 3.1 の証明. 関数 f は開区間 $I:=(a-\delta,a+\delta)$ $(\delta>0)$ で C^{n+1}-級であるとしてよい．このとき $|h|<\delta$ みたす h に対して $a+h\in I$ である．

仮定から f は I で C^{n+1}-級だから，$f^{(n+1)}$ は I 上で連続である（定義 2.8 参照）．したがって，$f^{(n+1)}$ は I に含まれる閉区間 $I':=[a-\frac{\delta}{2},a+\frac{\delta}{2}]$ 上で最大値 m_1，最小値 m_2 をとる．そこで $M:=\max\{|m_1|,|m_2|\}$ とすれば[3]，

$$(*) \qquad \text{各 } x\in I' \text{ に対して} \qquad |f^{(n+1)}(x)|\leqq M$$

が成り立つ．

[*] 2013 年 10 月 22 日 (2013 年 10 月 29 日訂正)
[1] 剰余：remainder.
[2] Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813.
[3] 記号 $\max\{a,b\}$ は a と b のうち小さくない方を表す．

とくに関数 f は I で $n+1$ 回微分可能だから，テイラーの定理 2.9 から，各 $h\in I'$ に対して

$$R_{n+1}(h):=f(a+h)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta_h h)$$

をみたす θ_h $(0<\theta_h<1)$ が存在することがわかる．このとき $a+\theta_h h\in I'$ であるから，$(*)$ から，

$$|R_{n+1}(h)|\leqq\frac{|h^{n+1}|}{(n+1)!}M, \qquad \text{したがって} \qquad \left|\frac{R_{n+1}(h)}{h^n}\right|\leqq\frac{M|h|}{(n+1)!}$$

が成り立つので，

$$-\frac{M|h|}{(n+1)!}\leqq\frac{R_{n+1}(h)}{h^n}\leqq\frac{M|h|}{(n+1)!}.$$

この右辺と左辺は $h\to 0$ としたときに 0 となるから，結論が得られた． □

例 3.3. 極限値

$$(\star) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-a-bx}{x^2}$$

が存在するような定数 a,b の値を求めよう．テイラーの定理 3.1 を $f(x)=e^x$, $a=0$, $h=x$, $n=2$ として適用すると

$$(\star\star) \qquad e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+R_3(x), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{R_3(x)}{x^2}=0$$

を得る．したがって

$$\begin{aligned}\frac{e^x-a-bx}{x^2}&=\frac{(1-a)+(1-b)x+\frac{1}{2}x^2+R_3(x)}{x^2}\\&=\frac{1-a}{x^2}+\frac{1-b}{x}+\frac{1}{2}+\frac{R_3(x)}{x^2}\end{aligned}$$

となる．この右辺の最後の項は $(\star\star)$ から $x\to 0$ のとき 0 に近づくので，極限値が存在するためには

$$X:=\frac{1-a}{x^2}+\frac{1-b}{x}=\frac{1}{x^2}\bigl(1-a+x(1-b)\bigr)$$

が $x\to 0$ で収束しなければならない．いま $a\neq 1$ とすると，$|X|\to\infty$ $(x\to 0)$ となるので，極限が存在するためには $a=1$．このとき $X=(1-b)/x$ だか

ら，これが収束するためには $b=1$ でなければならない．以上から，極限値 $(\star)$ が存在するためには $a=b=1$ でなければならず，そのとき

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{R_3(x)}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$$

となる． ♢

3.2 収束の次数とランダウの記号

テイラーの定理の剰余項の性質を表すために記号を用意する：

記号 3.4. 関数 f, g が

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \tag{3.2}$$

をみたすとき，

$$f(x)=o\bigl(g(x)\bigr)\qquad(x\to a)$$

と書く．この o を**ランダウの（小文字の） o 記号**[4][5]という．とくに $g(x)\to 0$ $(x\to a)$ のとき，(3.2) は，$f(x)$ が $g(x)$ **よりもはやく** 0 **に近づく**ことを意味している．したがって (3.3) を，

$x\to a$ のとき $f(x)$ は $g(x)$ よりもはやく 0 に近づく，

または

$x\to a$ のとき $f(x)$ は $g(x)$ よりはやい**オーダー**[6]で 0 に近づく

と読むことがある．

また，$f(x)-g(x)=o\bigl(h(x)\bigr)$ $(x\to a)$ のとき

$$f(x)=g(x)+o\bigl(h(x)\bigr)\qquad(x\to a) \tag{3.3}$$

と書く．

[4] Edmund Gerorg Hermann Landau; 1877–1938, De.

[5] ランダウの記号：Landau's symbol; ランダウの記号にはもうひとつ，o と異なる意味をもつ "大文字の O 記号" がある．これは第 5 回に紹介する．

[6] オーダー（次数）：order

例 3.5. （問題 3-4）

- 定数関数 1 に対して $f(x)=o(1)$ $(x\to a)$ であることは $\lim_{x\to a}f(x)=0$ であることと同値である．
- 整数 m, n に対して $x^m=o(x^n)$ $(x\to 0)$ であるための必要十分条件は $m>n$ が成り立つことである．
- $\cos x=1+o(x)$ $(x\to 0)$. ♢

注意 3.6. 式 $f(x)=o\bigl(g(x)\bigr)$ $(x\to a)$ はあくまでも (3.2) の略記でしかなく，記号 $o\bigl(g(x)\bigr)$ 自体が特別な関数を表しているわけではない．実際，

$$x^2=o(x),\qquad x^3=o(x)\qquad(x\to 0)$$

は正しい式だが，これらを引き算して得られる "$x^2-x^3=0$" は正しくない．

ランダウの記号を用いると，定理 3.1 は次のように書き換えられる：

系 3.7. 関数 $f(x)$ は a を含む開区間で C^{n+1}-級とする．このとき，

$$f(a+h)=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^n\right)+o(h^n)\qquad(h\to 0). \tag{3.4}$$

3.3 テイラーの定理の別証明と積分型剰余項

剰余項の表し方にはさまざまなものがあるが，ここではもうひとつの表示を紹介しておく：

定理 3.8 (テイラーの定理 3)**.** 関数 f が a を含む開区間 I で $n+1$ 回微分可能ならば，$a+h\in I$ となる h に対して，次が成り立つ：

$$\begin{aligned}f(a+h)&=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n+R_{n+1}(h)\\&=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}f^{(j)}(a)h^j+R_{n+1}(h),\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$R_{n+1}(h)=\frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-u)^nf^{(n+1)}\bigl(a+uh\bigr)\,du.$$

注意 3.9. 式 (3.5) の $R_{n+1}(h)$ と式 (2.1) の $R_{n+1}(h)$ は同じ値をもつ．実際，この値は

$$R_{n+1}(h) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) h^k$$

である．定理 2.9, 3.8 はこの値の表示のしかたを与えていることになる．

定理 3.8 の証明. $x = a + h$ とおいて，微積分の基本定理と部分積分の公式を用いると，

$$\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(t)\,dt = \int_a^x (t-x)' f'(t)\,dt \\
&= \bigl[(t-x)f'(t)\bigr]_{t=a}^{t=x} - \int_a^x (t-x) f''(t)\,dt \\
&= f'(a)(x-a) - \int_a^x \left(\frac{1}{2}(t-x)^2\right)' f''(t)\,dt \\
&= f'(a)(x-a) - \left[\frac{(t-x)^2}{2} f''(t)\right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)\,dt \\
&= f'(a)(x-a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \int_a^x \left(\frac{(t-x)^3}{6}\right)' f'''(t)\,dt \\
&= \dots \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k\right) + \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

ここで，$t = (1-u)a + ux$ とおいて置換積分を行うと，最後の項の積分は

$$\begin{aligned}
R_{n+1}(h) :&= \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&= \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}\bigl((1-u)a + ux\bigr)\,du
\end{aligned}$$

となり，結論を得る． □

注意 3.10. 定理 3.8 の (3.4) の剰余項の形を**積分型剰余項** とよぶことがある．そのほかにもさまざまな剰余項の表示のしかたが知られているが，ここでは深入りしない．

次は，テイラーの定理の剰余項を用いることで，ある種の級数の和が具体的に求まる例である．定理 2.9 の形の剰余項を用いても同様の結論が得られる．

例 3.11. 定理 3.8 を，

$$f(x) = \log(1+x), \qquad a = 0, \qquad h = 1$$

に対して適用してみよう．一般に $k \geqq 1$ に対して

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k},$$

だから，正の整数 n に対して

$$(\sharp)\quad \log 2 = f(1) = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + R_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + R_{n+1}$$

と書けば，

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-u)^n \frac{(-1)^{n+2} n!}{(1+u)^{n+1}}\,du = (-1)^n \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1+u)^{n+1}}\,du$$

となる．ここで $0 \leqq u \leqq 1$ をみたす u に対して $1 \leqq 1+u \leqq 2$ であるから，

$$0 \leqq \frac{(1-u)^n}{(1+u)^{n+1}} \leqq (1-u)^n \qquad (0 \leqq u \leqq 1)$$

となるので，

$$|R_{n+1}| = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1+u)^{n+1}}\,du \leqq \int_0^1 (1-u)^n\,du = \frac{1}{n+1}.$$

したがって，n をどんどん大きくしていったとき，

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$$

が成り立つ．そこで，($\sharp$) で $n \to \infty$ とすると，

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

が成り立つ． ♢

問　題　3

3-1　関数 $f(x)$ は x の n 次多項式で与えられているとする．このとき，

(1)　等式

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k \end{aligned}$$

が成り立つことを示しなさい．

(2)　$f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 4$ とするとき $f(\sqrt{2}+2)$，$f(1.1)$ をそれぞれ求めなさい．
（ヒント：前の問いの式を $a = \sqrt{2}$, $a = 1$ の場合に書く.）

3-2　テイラーの定理を用いて次の極限値を求めなさい：

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\tan x - 3x - x^3}{x^5}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1+x) - 2x + x^2}{x^3}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\tan^3 x}$.

3-3　次の極限値が存在するように，定数 a, b の値を定めなさい：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x - a\sin x + bx}{x^5}.$$

3-4　例 3.5 を確かめなさい.

3-5*　テイラーの定理 3.8 を $f(x) = \tan^{-1} x$ に対して適用することにより，

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

であることを示しなさい.

3-6*　自然対数の底 e が無理数であることを，以下のように示しなさい.

(1)　関数 $f(x) = e^x$ は実数全体で単調増加であることを示しなさい.

(2)　前回のテイラーの定理 2.9 を $f(x) = e^x$, $a = 0$, $h = 1$, $n = 2$ に対して適用し，$e^\theta < e$ $(0 < \theta < 1)$ であることを用いて $2.6 < e < 3$ であることを示しなさい.

(3)　以下，e は有理数であると仮定して矛盾を導く．$e = m/n$ (m, n は正の整数) とおくと $n \geqq 2$ であることを確かめなさい.

(4)　テイラーの定理 2.9 を $f(x) = e^x$,$a = 0$, $h = 1$ として，前の問いの n に対して適用した式を書きなさい.

(5)　前の問いの式の両辺に $n!$ をかけた等式は，テイラーの定理の剰余項に対応する項以外はすべて整数の項からなることを確かめなさい.

(6)　前の問いで得られた等式の，剰余項に対応する項は整数にならないことを示しなさい．これは矛盾なので，背理法が完成した.

4. テイラー級数

4.1　例：テイラーの定理の剰余項の挙動

第 3 回では，テイラー定理 2.9 の，与えられた n に対する剰余項 $R_{n+1}(h)$ の，$h \to 0$ としたときの挙動を調べた．今回は，テイラーの定理 2.9 の h を固定したときに n を大きくしたときの剰余項 $R_{n+1}(h)$ のふるまいを調べる．

例 4.1. 関数 $f(x) = e^x$ に対して $a = 0$, $h = x$, n を正の整数として，テイラーの定理 2.9 を適用すると

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + R_{n+1}(x), \qquad R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta_n x}x^{n+1} \qquad (0 < \theta_n < 1) \tag{4.1}$$

をみたす θ_n が存在することがわかる．ここで f は単調増加関数（問題 3-6）であるから，$0 < \theta_n < 1$ であることに注意すれば

$$e^{\theta_n x} \leqq \begin{cases} e^x & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ．とくに $x < 0$ のとき $1 < e^{-x} = e^{|x|}$ だから，各実数 x に対して

$$|R_{n+1}(x)| \leqq e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

したがって，節末の補題 4.14 から，任意に与えられた実数 x に対して，

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$$

が成り立つ．とくに (4.1) で $n \to \infty$ とすれば，任意の実数 x に対して等式

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k \tag{4.2}$$

が成り立つことがわかる．　◇

*) 2013 年 10 月 29 日 (2013 年 11 月 5 日訂正)

例 4.2. 関数 $\cos x$, $\sin x$ に対して例 4.1 と同様の議論を行うと，

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \tag{4.3}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \tag{4.4}$$

が任意の実数 x に対して成り立つことがわかる（問題 4-1）．　◇

例 4.3. 関数 $f(x) = \log(1+x)$（$-1 < x \leqq 1$）に対して，テイラーの定理 2.9 を $a = 0$, $h = x$ として適用する．正の整数 k に対して $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ であることに注意すれば，テイラーの定理 2.9 から

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + R_{n+1}, \qquad R_{n+1} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0 < \theta < 1)$$

をみたす θ が存在することがわかる．もし $0 \leqq x \leqq 1$ ならば

$$|R_{n+1}| \leqq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leqq \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{4.5}$$

一方，$-1 < x < 0$ のときは，定理 3.8 の形の剰余項を用いれば，$h := -x$ $(0 < h < 1)$ とおいて

$$|R_{n+1}| \leqq |x|^{n+1}\left|\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1+ux)^{n+1}}\,du\right| = h^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1-uh)^{n+1}}\,du = h^{n+1}\int_0^1 \left(\frac{1-u}{1-uh}\right)^n \frac{du}{1-uh} = h^{n+1}\int_0^1 \frac{s^n}{1-hs}\,ds.$$

ここで，最後の等式は変数変換 $s = (1-u)/(1-uh)$ による．区間 $0 \leqq s \leqq 1$ で $1 - hs \geqq 1 - h$ だから，$0 < h < 1$ に注意すれば

$$|R_{n+1}| \leqq h^{n+1}\int_0^1 s^n\,ds = \frac{h^{n+1}}{n+1} \leqq \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{4.6}$$

となる．したがって，(4.5) と (4.6) から，

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k \qquad (-1 < x \leqq 1) \tag{4.7}$$

が成り立つ（例 3.11 参照）．等式 (4.7) の左辺は $x > -1$ をみたす任意の x に対して定義されるが，$x > 1$ となる x に対して右辺の級数は意味をもたない（発散する；第 10 回参照）． ◇

4.2　テイラー展開

関数 f は a を含む開区間で C^∞-級（定義 2.8）であるとする．このとき，(2.1) で $R_n(h)$ を定義したとき，ある区間 I のすべての h に対して $\lim_{n\to\infty} R_n(h) = 0$ が成り立つならば，各 $h \in I$ に対して

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(a)h^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k \tag{4.8}$$

が成り立つ．これを f の a のまわりの**テイラー展開**[1] という．とくに (4.8) で $a = 0$ の場合を**マクローリン展開**[2]という[3]．

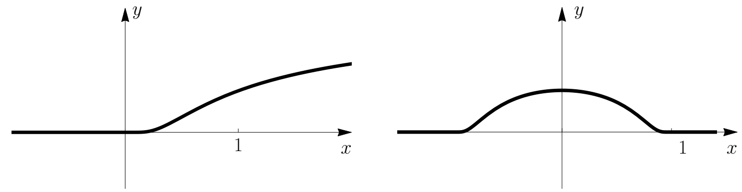
4.3　解析関数

式 (4.2), (4.3), (4.4), (4.7) はそれぞれ $e^x, \cos x, \sin x, \log(1+x)$ の 0 の回りのテイラー展開（マクローリン展開）を与えている．

定義 4.4. 点 a を含む区間で C^∞-級な関数 f が a を含む開区間 I で (4.8) のような形で表される，すなわちテイラー展開可能であるとき，f は a で**解析的**（正確には実解析的）とよばれる[4]．とくに f が定義域の各点で実解析的であるとき f は単に実解析的，または**解析関数**という．実解析的であることを “C^ω-級” ということがある[5]．

定義から解析関数は C^∞-級であるが，逆は一般に成立しない．

[1] テイラー展開：the Taylor expansion.
[2] マクローリン展開：the Maclaurin expansion; Colin Maclaurin (1698–1746, Scotland).
[3] 「テイラーの定理」と「テイラー展開」は区別すること．テイラーの定理 2.9 は $f(a+h)$ を h の有限次の多項式で近似したときの誤差を表現する定理である．一方，テイラー展開は，$f(a+h)$ を無限級数で「正確に」表すものである．
[4] (実) 解析的：(real) analytic; 複素変数の関数の解析性は別の形で定義されるので，区別するためは「実」をつけることが多い．
[5] 解析関数：an analytic function. C^ω-級：of class C-omega.



$y = e^{-1/x}$ $(x > 0)$; 0 $(x \leqq 0)$　　$y = e^{1/(x^2-1)}$ $(|x| < 1)$; 0 $(|x| \geqq 1)$

図 4.1　例 4.5.

例 4.5. 実数全体で定義された関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

と定める（図 4.5 左）．このとき，

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

であるが，$x = 0$ でも微分可能である．実際，補題 4.15 から

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to+0}\frac{e^{-1/h}}{h} = \lim_{u\to+\infty} ue^{-u} = 0,$$
$$\lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to-0}\frac{0}{h} = 0.$$

したがって補題 4.16 より

$$f'(0) = \lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = 0$$

となる．以上より

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

となるが，再び補題 4.15 から f' は 0 で連続である．したがって f は C^1-級関数である．

実は f は C^∞-級の関数で，

$$f^{(k)}(x)=\begin{cases} P_k\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-1/x} & (x>0)\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases} \tag{4.9}$$

と表される．ここで $P_k(t)$ は t の多項式で

$$P_0(t)=1,\qquad P_{k+1}(t)=t^2\bigl(P_k(t)-P_k'(t)\bigr)\quad (k=0,1,2,\dots)$$

で帰納的に定義されるものである（問題 4-5）．したがって f は C^∞-級であるが，0 で実解析的でない．実際，もし 0 で実解析的であれば，十分小さい x に対して

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}0\times x^k=0$$

となる．ところが，$x>0$ なら x がいくら小さくても $f(x)>0$ となる．これは矛盾なので f は 0 で解析的でない．

同様に

$$g(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & (|x|<1)\\ 0 & (|x|\geqq 1)\end{cases}$$

も C^∞-級であるが，±1 で解析的でない（図 4.5 右）． ◇

4.4 一般化された二項定理

定義 4.6. 実数 α と負でない整数 k に対して

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}\quad (k>0),\qquad \binom{\alpha}{0}=1$$

と定め，これを**二項係数**[6]とよぶ．

例 4.7. [問題 4-3]

$$\binom{-1}{0}=1,\quad \binom{-1}{1}=-1,\quad \binom{-1}{2}=1,\quad \dots,\quad \binom{-1}{k}=(-1)^k.$$
$$\binom{\frac12}{0}=1,\quad \binom{\frac12}{1}=\frac12,\quad \binom{\frac12}{2}=-\frac18,\quad \binom{\frac12}{2}=\frac{1}{16},\quad \dots.$$

6) 二項係数：the binomial coefficient

◇

注意 4.8. 正の整数 n に対して，$\binom{n}{k}$ は「n 個から k 個を選ぶ組み合わせの数[7]」である．とくにこのとき，

$$k>n \text{ ならば } \binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\dots(n-n)(n-n-1)\dots(n-k+1)}{k!}=0$$

が成り立つ．

補題 4.9. 任意の実数 α と正の整数 k に対して次が成り立つ：

$$\binom{\alpha+1}{k}=\binom{\alpha}{k-1}+\binom{\alpha}{k}.$$

証明. 右辺を変形して左辺を導く：

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{k-1}+\binom{\alpha}{k}&=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+2)}{(k-1)!}+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}\\ &=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+2)}{k!}\bigl(k+(\alpha-k+1)\bigr)\\ &=\frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+1-k+1)}{k!}=\binom{\alpha+1}{k}.\end{aligned}$$ □

定理 4.10 (二項定理[8])**.** 正の整数 n に対して次が成り立つ：

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

証明は問題 4-4 とする．この n を正の整数に限らない実数とした $(1+x)^\alpha$ を考えよう：

補題 4.11. 任意の実数 α と正の整数 n に対して

$$(1+x)^\alpha=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\dots+\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n)\qquad (x\to 0)$$

が成り立つ．ただし $o(\cdot)$ はランダウの記号 3.4 である．

7) 高等学校の教科書では "${}_n\mathrm{C}_k$" を使うことが多いが，"$\binom{n}{k}$" の方が一般的によく使われるようである．とくに α が正の整数でないときは "${}_\alpha\mathrm{C}_k$" とは書かない．

8) 二項定理：the binomial theorem

証明． 関数 $f(x) = (1+x)^\alpha$ を微分すれば

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

となるので，テイラーの定理の系 3.7 から結論が得られる． □

補題 4.11 は，x が十分小さい範囲では，二項定理に類似の式が近似的に成り立つことを主張している．ここで，α が正の整数でなければ，二項係数は 0 にならないので，定理 4.10 のような有限の項からなる等式は期待できないことに注意しよう．

補題 4.11 の剰余項をきちんと評価すると[9)]次がわかる：

定理 4.12 (一般化された二項定理)**.** 任意の実数 α に対して次が成り立つ：

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \qquad (-1 < x < 1).$$

例 4.13.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k \qquad (-1 < x < 1). \qquad \diamondsuit$$

4.5 いくつかの補題

この節の議論で用いたいくつかの事実をまとめておく．

補題 4.14. 任意の正の実数 x に対して $\lim_{n\to\infty}(x^n/n!) = 0$ が成り立つ．

証明． 正の実数 x に対して $N-1 < x \leqq N$ をみたす正の整数 N が存在する．番号 n が $n > N$ をみたしているとき，

$$\begin{aligned}0 &\leqq \frac{x^n}{n!} = \frac{x^N}{N!}\frac{x^{n-N}}{n(n-1)\dots(N+1)} \leqq \frac{x^N}{N!}\frac{N^{n-N}}{(N+1)^{n-N}} \\ &= \frac{x^N}{N!}\left(\frac{N+1}{N}\right)^N\left(\frac{N}{N+1}\right)^n = C\left(\frac{N}{N+1}\right)^n \qquad \left(C := \frac{x^N}{N!}\left(\frac{N+1}{N}\right)^N\right)\end{aligned}$$

となる．$0 < N/(N+1) < 1$ なので $n\to\infty$ としたとき上の式の右辺は 0 に近づくので，結論が得られる． □

[9)] 第 10, 11 回に別の方法で証明を与える．ここでは証明には深入りしない．

補題 4.15. 任意の多項式 $P(x)$ に対して，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{e^x} = 0$$

が成り立つ．

証明． 多項式 $P(x)$ の次数を N とする．このとき，テイラーの定理 2.9 を $f(x) = e^x$, $a = 0$, $h = x > 0$, $n = N+1$ として適用すると，

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{(N+1)!}x^{N+1} + \frac{e^{\theta x}}{(N+2)!}x^{N+2} \geqq \frac{1}{(N+1)!}x^{N+1}.$$

ただし θ は $0 < \theta < 1$ をみたす数である．とくに

$$P(x) = p_N x^N + p_{N-1}x^{N-1} + \dots + p_1 x + p_0 \qquad (p_N \neq 0)$$

と書けば，$x > 0$ のときに

$$\left|\frac{P(x)}{e^x}\right| \leqq \frac{(N+1)!|P(x)|}{x^{N+1}} = \frac{(N+1)!}{x}\left|p_N + \frac{p_{N-1}}{x} + \dots + \frac{p_0}{x^N}\right| \to 0 \ (x\to+\infty)$$

となり，結論が得られた． □

補題 4.16. 点 a を含む開区間 I から a を除いた集合 $I\setminus\{a\} = \{x \in I \mid x \neq a\}$ で定義された関数 f が $\lim_{x\to a+0} f(x) = A$, $\lim_{x\to a-0} f(x) = A$ をみたしているならば，$\lim_{x\to a} f(x) = A$ である．

この事実の証明は第 6 回にあたえる．

問　題　4

- **4-1** 式 (4.3), (4.4) を示しなさい．(ヒント：$|\cos X| \leqq 1$, $|\sin X| \leqq 1$ を用いる．)
- **4-2** 双曲線関数 $\cosh x$, $\sinh x$ の $x = 0$ を中心とするテイラー展開を求めなさい．
- **4-3** 例 4.7 を確かめなさい．
- **4-4** 定理 4.10 を証明しなさい．(ヒント：n に関する数学的帰納法．ステップの部分で補題 4.9 を用いる．)
- **4-5*** 例 4.5 の式 (4.9) を示しなさい．(ヒント：数学的帰納法による．)

5. 数列の極限

5.1 準備：実数の絶対値

実数 x に対して，数 $|x|$ を (1) $x \geqq 0$ のとき $|x| = x$, (2) $x < 0$ のとき $|x| = -x$ と定め，x の**絶対値**という[1]．定義から，任意の実数 x, y に対して

$$(5.1) \qquad |x| \geqq 0, \quad |x| \geqq x, \quad |-x| = |x|, \quad |x|^2 = x^2, \quad |xy| = |x|\,|y|$$

が成り立つことがわかる．実数 a と正の数 δ に対して[2]

$$(5.2) \qquad |x-a| < \delta \qquad \Longleftrightarrow \qquad a-\delta < x < a+\delta$$

である．これは x が a の両側 δ の幅の区間に含まれていることを表している．

補題 5.1 (三角不等式[3])**.** 任意の実数 x, y に対して次が成り立つ：

$$|x+y| \leqq |x| + |y|, \qquad \big||x| - |y|\big| \leqq |x-y|.$$

証明． まず (5.1) から

$$\begin{aligned}(|x|+|y|-|x+y|)(|x|+|y|+|x+y|) &= (|x|+|y|)^2 - (|x+y|^2) \\ &= |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 - (x+y)^2 = 2(|xy| - xy) \geqq 0\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $(x,y) \neq (0,0)$ ならば $|x|+|y|+|x+y| > 0$ なので第一の不等式が得られる．除外した $x = y = 0$ の場合は第一の不等式は明らか．

第一の不等式を用いると，

$$\begin{aligned}|x| &= |y+(x-y)| \leqq |y| + |x-y| = |y| + |x-y|, \\ |y| &= |x+(y-x)| \leqq |x| + |x-y|\end{aligned}$$

なので第二の不等式が得られる． □

*) 2013 年 11 月 5 日 (2013 年 11 月 5 日訂正)

1) 絶対値：the absolute value, the modulus.

2) δ: delta；$\Leftrightarrow$ は "であるための必要十分条件は" と読む．

3) 三角不等式：the triangle inequality．この名前は，三角形の 2 辺の長さの和は他の 1 辺の長さより大きい，という定理に対応する不等式 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}| \leqq |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$ の類似しているところから来ている．

5.2 数列の極限

無限個の項からなる**数列** $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ を[4] $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$，または範囲を省略して $\{a_n\}$ と書くことにする．

定義 5.2. 数列 $\{a_n\}$ が実数 α に**収束する**[5]とは，以下が成り立つことである．

任意の正の実数 ε に対して[6]以下をみたす番号 N が存在する[7]：

$n \geqq N$ をみたす任意の番号 n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ．

このとき「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$」,「$a_n \to \alpha\ (n \to \infty)$」と書き，$\alpha$ を $\{a_n\}$ の**極限値**という．数列 $\{a_n\}$ がいかなる数にも収束しないとき，**発散する**という．

定義 5.3. 数列 $\{a_n\}$ が**正の無限大に発散する**とは[8]，

任意の実数 M に対して，次をみたす番号 N が存在する：$n \geqq N$ をみたす任意の番号 n に対して $a_n > M$ が成り立つ．

が成立することである．このことを「$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$」と書く．

負の無限大に発散することも同様に定義できる（問題 5-1）．

注意 5.4. 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは，直観的には「n をどんどん大きくすると a_n が α にどんどん近づく」ことだが，定義 5.2 は「n を大きくしさえすれば，a_n は α に好きなだけ近くすることができる」という表現の方が近いだろう．数学で使われる論理は「どんどん」というような動的な表現が苦手なので，定義 5.2 の書き方の方が，論理展開には便利である．「どんどん」や「限りなく」に相当することは「任意の ε」などの表現に含まれている．

補題 5.5 (問題 5-2)**.** (1) 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば，次をみたす実数 M が存在する：任意の番号 n に対して $|a_n| \leqq M$．[9]

(2) 数列 $\{a_n\}$ が正の数 α に収束するならば，ある番号 N で，$n \geqq N$ をみたす任意の番号 n に対して $a_n \geqq \frac{\alpha}{2}$ が成り立つものが存在する．とくに，ある番号から先は a_n は正である．

(3) 数列 $\{a_n\}$ が正の無限大に発散するなら数列 $\{1/a_n\}$ は 0 に収束する．

4) 数列：a sequence.

5) 数列 $\{a_n\}$ が α に収束する：A sequence $\{a_n\}$ converges to α.；発散する：diverge

6) ε: epsilon．しばしば "小さい数" を表すのに用いる．

7) ここでは「番号」で負でない整数のことを表す．

8) 正（負）の無限大に発散する：to diverge to the positive (negative) infinity.

9) すなわち $\{a_n\}$ は有界．定義 5.9 参照．

証明． (1): 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するなら（定義 5.2 の ε として 1 をとる）「$n \geqq N$ をみたす n に対して $|a_n-\alpha|<1$」となる番号 N が存在する．この N に対して $M:=\max\{|a_0|,|a_1|,\dots,|a_{N-1}|,|\alpha-1|,|\alpha+1|\}$ とすれば[10)]，M は結論をみたす．

(2): 定義 5.2 の ε として $\alpha/2\ (>0)$ をとれば「$n \geqq N$ をみたす任意の n に対して $|a_n-\alpha|<\alpha/2$」となる番号 N が存在する．この N に対して結論が成り立つ．

(3): 正の数 ε を任意にとると，（定義 5.3 の M を $1/\varepsilon$ として）「$n \geqq N$ ならば $|a_n|>1/\varepsilon$」となる番号 N が存在する．このとき $n \geqq N$ ならば $|1/a_n|<\varepsilon$． □

注意 5.6. 補題 5.5 の (1), (2) は「収束すること」が仮定になっているから，定義 5.2 の条件が成り立っている．この条件は “任意の ε” に対して成り立っているのだから，使うときには ε の値を好きに選んで良い．一方，(3) では，収束することが結論だから，“任意の ε” に対して条件が成り立つことを示す必要がある．すなわち，証明の中で ε を選ぶことはできない．なお，(3) の仮定は $+\infty$ に発散する（定義 5.3）ことなので，M の値は好きにとれる．

ここで，いくつか「あたりまえ」のことを確認しておく：

補題 5.7. (1) 定数 c に対して $a_n=c$ とすると $\{a_n\}$ は c に収束する．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとき，数列 $\{ca_n\}$ は $c\alpha$ に収束する．

(3) 数列 $\{a_n\}$ が α に，$\{b_n\}$ が β に収束するとき，$n\to\infty$ で

$$(a)\ a_n+b_n \to \alpha+\beta, \qquad (b)\ a_nb_n \to \alpha\beta, \qquad (c)\ \frac{a_n}{b_n} \to \frac{\alpha}{\beta}$$

が成り立つ．ただし最後の等式では $\beta \neq 0$ と仮定する．

証明． (1): 正の数 ε を任意にとり，$N=0$ とすると，$n \geqq N$ をみたす任意の n に対して $|a_n-c|=|c-c|=0<\varepsilon$．

(2): $c=0$ なら (1) のケースなので，$c\neq 0$ としてよい．正の数 ε を任意にとる．$\{a_n\}$ は α に収束するのだから，番号 N で「$n \geqq N$ ならば $|a_n-\alpha|<\varepsilon/|c|$」となるものが存在する．この N に対して $n \geqq N$ ならば $|ca_n-c\alpha|=|c|\,|a_n-\alpha|<\varepsilon$ とできるので $\{ca_n\}$ は $c\alpha$ に収束する．

(3) (a)：番号 N_1, N_2 を「$n \geqq N_1$ ならば $|a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$」,「$n \geqq N_2$ ならば $|b_n-\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$」となるようにとり $N=\max\{N_1,N_2\}$ とおくと，$n \geqq N$ ならば

$$\begin{aligned}|(a_n+b_n)-(\alpha+\beta)| &= |(a_n-\alpha)+(b_n-\beta)| \\ &\leqq |a_n-\alpha|+|b_n-\beta| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

10) $\max\{\dots\}$ は $\{\dots\}$ 内の有限個の数のうち最大のものを表す．

ここで，三角不等式（補題 5.1）を用いた．

(3) (b)：補題 5.5 の (1) から $|a_n| \leqq M$ をみたす正の実数 M が存在する．与えられた正の数 ε に対して番号 N を，

$$|a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2\beta}, \qquad |b_n-\beta|<\frac{\varepsilon}{2M} \qquad (n \geqq N)$$

となるようにとり，式変形

$$a_nb_n-\alpha\beta = a_nb_n-a_n\beta+a_n\beta-\alpha\beta = a_n(b_n-\beta)+\beta(a_n-\alpha)$$

を用いればよい（問題 5-4）．

(3) (c)：(b) を認めれば，$1/b_n \to 1/\beta$ を示せば十分．すると補題 5.5 の (2) から，ある番号 N_1 を「$n \geqq N_1$ ならば $|b_n| \geqq |\beta/2|$」となるようにとれる．一方，$b_n\to\beta$ なので「$n \geqq N_2$ ならば $|b_n-\beta|<\beta^2\varepsilon/2$」となるような番号 N_2 をとることができる．そこで，$N=\max\{N_1,N_2\}$ とおけば結論が得られる（問題 5-4）． □

補題 5.8 (はさみうち)**.** (1) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がそれぞれ α, β に収束し，さらにすべての番号 n に対して $a_n \leqq b_n$ が成り立つならば $\alpha \leqq \beta$．

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が，各番号 n に対して $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ をみたし，さらに，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が同じ値 α に収束するならば，$\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$．

(3) 数列 $\{a_n\}$ に対して，各項の絶対値をとった数列 $\{|a_n|\}$ が 0 に収束するなら，$\{a_n\}$ も 0 に収束する．

(4) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がすべての番号 n に対して $a_n \leqq b_n$ をみたし，$\{a_n\}$ が正の無限大に発散するならば，$\{b_n\}$ も正の無限大に発散する．

証明． (1): 背理法による．$\beta<\alpha$ と仮定すると $\varepsilon:=(\alpha-\beta)/3$ は正の実数である．このとき「$n \geqq N_1$ をみたす任意の n に対して $|a_n-\alpha|<\varepsilon$」,「$n \geqq N_2$ をみたす任意の n に対して $|b_n-\beta|<\varepsilon$」となる番号 N_1, N_2 が存在する．したがって，$N=\max\{N_1,N_2\}$ とすると，ε のとり方から，次のように矛盾が得られる：

$$\alpha-\varepsilon<a_N \leqq b_N<\beta+\varepsilon \quad だから \quad \frac{2}{3}\alpha+\frac{\beta}{3} \leqq \frac{2}{3}\beta+\frac{\alpha}{3} \quad すなわち \quad \alpha<\beta.$$

(2): 任意の番号 n に対して $a_n-\alpha \leqq c_n-\alpha \leqq b_n-\alpha$ なので

$$|c_n-\alpha| \leqq \max\{|a_n-\alpha|,|b_n-\alpha|\} \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

が成り立つ．ここで $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ はともに α に収束するから，任意の正の数 ε に対して，ある番号 N で「$n \geqq N$ ならば $|a_n-\alpha|<\varepsilon$, $|b_n-\alpha|<\varepsilon$」が成り立つものが存在する．この N に対して $n \geqq N$ ならば $|c_n-\alpha|<\varepsilon$ が成り立つ．

(3): $-|a_n| \leqq a_n \leqq |a_n|$ と (2) を用いる．(4) は演習問題とする（問題 5-3）． □

5.3 実数の連続性

極限を考える際に，実数の性質が重要となってくる．実数全体の集合[11] $\mathbb{R}$ は (1) 加減乗除が自由にでき，然るべき演算法則をみたす (2) 大小の関係が定義されて，然るべき性質（不等式の性質）をみたす，という 2 つの重要な性質があるが，これらは有理数全体の集合ももつ性質である．実数全体の集合を特徴付ける性質は，高等学校の教科書ではあからさまに述べられていないので，ここで紹介する．そのためにいくつか言葉を用意する．

定義 5.9. 数列 $\{a_n\}$ が**上に（下に）有界**である[12]とは「任意の番号 n に対して $a_n \leqq M$ ($a_n \geqq M$)」となる数 M が存在することである．さらに $\{a_n\}$ が上に有界かつ下に有界であるとき，**有界**であるという．

注意 5.10. 数列 $\{a_n\}$ が有界であるための必要十分条件は「任意の番号 n に対して $|a_n| \leqq M$」となる正の数 M が存在することである（問題 5-5）．

定義 5.11. 数列 $\{a_n\}$ が**単調非減少**（**単調非増加**）である[13]とは各番号 n に対して $a_n \leqq a_{n+1}$ ($a_n \geqq a_{n+1}$) が成り立つことである．

公理 5.12 (実数の連続性[14])**.** 各項が実数の，上に（下に）有界な単調非減少（非増加）数列は収束する．

注意 5.13. ここで**公理**[15]とは，以後の議論をするために最初におく仮定のことをいう．直接定義するのではなく「このような性質をもつ」ということによって実数全体の集合を間接的に定義していることになっている．

例 5.14 (十進小数[16])**.** 項が 0 から 9 までの整数である数列 $\{p_n\}$ に対して

$$a_n := p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \cdots + \frac{p_n}{10^n} = \sum_{k=0}^{n} p_k 10^{-k} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

[11] 実数全体の集合：the set of real numbers.
[12] 有界：bounded; 上に有界：bounded from above; 下に有界：bounded from below.
[13] 単調非減少：monotone non-decreasing; 単調非増加：monotone non-increasing. このことをそれぞれ単調増加，単調減少ということもある．等号が入っているので，増加の代わりに非減少という．
[14] 実数の連続性：continuity of real numbers.
[15] 公理：an axiom.
[16] 十進小数：a decimal fraction.

とする．すると各番号 n に対して $a_{n+1} - a_n = p_{n+1}10^{-(n+1)} \geqq 0$,

$$a_n \leqq \sum_{k=0}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = 9\frac{1-\frac{1}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}} = 10\left(1 - \frac{1}{10^{n+1}}\right) \leqq 10$$

なので $\{a_n\}$ は上に有界な単調非減少数列．したがって，ある実数に収束する．この極限値が，無限小数 $p_0.p_1p_2p_3p_4\dots$ が表す実数である． ◇

注意 5.15. 公理 5.12 は有理数の範囲では正しくない．実際，例 5.14 の $\{a_n\}$ は有理数からなる単調非減少数列だが，その極限は有理数の範囲では存在するとは限らない．たとえば，小数 0.1001000100001000001... (1 の間の 0 の個数が一つずつ増える) が定まる実数は有理数ではない．

命題 5.16. 自然数の列 $\{n\}$ は上に有界ではない．(アルキメデス[17]の原理)．

証明． 数列 $\{n\}$ が上に有界ならば，公理 5.12 から収束する．極限値を α とすると，定義 5.2 の ε を $\frac{1}{2}$ として,「$n \geqq N$ ならば $|n - \alpha| < \frac{1}{2}$」となるような N が存在する．とくに $\alpha - \frac{1}{2} < n < \alpha + \frac{1}{2}$ ($n \geqq N$) であるが，n を一つ増やすとこの区間からはみ出してしまい，矛盾．したがって，この数列は上に有界でない． □

ここで「上に有界でない」ことを使いやすい形に書きなおそう：[18]

> 数列 $\{a_n\}$ が上に有界でないための必要十分条件は，任意の実数 M に対して $a_n > M$ をみたす番号 n が存在することである．

系 5.17. 任意の実数 M に対して $M < n$ をみたす自然数 n が存在する．

系 5.18. $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$.

証明． 任意の実数 M に対して系 5.17 から，$N > M$ をみたす自然数 N が存在する．このとき，$n \geqq N$ をみたす任意の番号 n に対して $M < N < n$. したがって数列 $\{n\}$ は正の無限大に発散する． □

このことと補題 5.5 から

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{5.3}$$

が成り立つ．また，系 5.18 の証明をまねることで，次がわかる（問題 5-6）：

補題 5.19. 上に有界でない単調非減少数列は正の無限大に発散する．

[17] Archimedes, B.C. 287–B.C .212; Gr.
[18] この手の書き換えは次回もう一度扱う.

5.4 極限の具体例

例 5.20. 実数 s に対して，数列 $\{n^s\}$ は (1) $s>0$ ならば正の無限大に発散する．(2) $s=0$ ならば 1 に収束する．(3) $s<0$ ならば 0 に収束する． ♢

例 5.21 (等比数列)**.** 実数 r に対して $\{r^n\}$ で与えられる数列は

(1) $r>1$ なら正の無限大に発散する．

(2) $r=1$ なら 1 に収束する．

(3) $-1<r<1$ なら 0 に収束する．

(4) $r<-1$ なら発散するが，正負いずれの無限大にも発散しない．

(1): もし $r>1$ ならば $r=1+h$ $(h>0)$ とおいて二項定理 4.10 を用いれば

$$r^n=(1+h)^n=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}h+\dots+\binom{n}{n}h^n \geqq 1+nh \geqq nh.$$

右辺は $n\to\infty$ で $+\infty$ に発散するから補題 5.8 (4) から r^n も $+\infty$ に発散．(3): $|r|<1$ のとき (1)$\{1/|r|^n\}$ は $+\infty$ に発散するから補題 5.5 (3) より $|r|^n=|r^n|$ は 0 に収束．したがって 補題 5.8 (3) から $\{r^n\}$ は 0 に収束する．(4) $r \leqq -1$ のとき，極限値が存在したとする．極限値が 0 でなければ補題 5.5 (2) より，ある番号から先の項は一定の符号をもたなければならないが，r^n は n の偶奇で符号が変わるので矛盾．一方，極限値が 0 なら $\{|r|^n\}$ は 0 に収束するので，矛盾． ♢

この極限値は第 8 回くらい（項別微分）で用いる．

補題 5.22. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

証明. 天下りだが，二項定理 4.10 を用いれば

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n &= 1+\binom{n}{1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}+\binom{n}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^2+\dots+\binom{n}{n}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n\\ &\geqq 1+\sqrt{2}\sqrt{n}+(n-1)\geqq n.\end{aligned}$$

したがって，

$$1\leqq \sqrt[n]{n}\leqq 1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

なので，例 5.20 と補題 5.8 を用いれば結論が得られる． □

問　　題　　5

5-1 定義 5.3 に倣って数列 $\{a_n\}$ が負の無限大に発散することの定義を書きなさい．

5-2 (1) 補題 5.5 の (1) の証明で，M をこのようにおけば，すべての番号 n に対して $|a_n|\leqq M$ がたしかに成り立つことを確かめなさい．

(2) 補題 5.5 の (2)，(3) の証明で，このような N が結論が成り立つことを確かめなさい．

5-3 補題 5.8 の (3), (4) に証明をつけなさい．

5-4 補題 5.7 (3) の積の場合，商の場合の証明を完成させなさい．

5-5 注意 5.10 を確かめなさい．

5-6 補題 5.19 を示しなさい．

5-7 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次で定める：

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n=1,2,3,\dots)$$

このとき $\{a_n\}$ が収束することを次の 2 つを示すことで示しなさい．

(1) 数列 $\{a_n\}$ は単調非減少である．
ヒント：次のように式変形して最後の式の最初の 2 項を因数分解する．

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\\&\geqq\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ は上に有界である．
ヒント：$(1+1/n)^n$ を二項定理 4.10 で展開し，次の関係式を用いる：

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\leqq\frac{n^k}{2^{k-1}}\qquad(k\geqq 2).$$

数列 $\{a_n\}$ の極限値が自然対数の底 e である．通常これを e の定義とする．

6. 関数の極限と連続関数

6.1 関数の極限

数列に倣って，関数の極限を「限りなく」などの語を用いずに定義する[1]．

定義 6.1. 数直線上の区間 I から $a \in I$ を除いたところで定義された関数 f が $x \to a$ で α に**収束する**とは，次が成り立つことである：

任意の正数 ε に対して以下をみたす正の数 δ が存在する[2]：

$0 < |x-a| < \delta$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$.

このことを「$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$」,「$f(x) \to \alpha\ (x \to a)$」と表す．また，

任意の正数 ε に対して以下をみたす正の数 δ が存在する[3]：

$0 < x-a < \delta$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$

が成り立つとき，x が a に（右から）近づくときの f の**右極限値**は α であるといい，$\lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha$ と書く．左極限値も同様（問題 6-1).

この定義によって第 4 回の補題 4.16 に証明を与える：

補題 6.2 (補題 4.16). 点 a を含む開区間 I から a を除いた集合 $I \setminus \{a\} = \{x \in I \,|\, x \neq a\}$ で定義された関数 f が $\lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha$ をみたしているならば，$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ である．

証明. 任意の正の数 ε に対して，正の数 δ_1, δ_2 で「$0 < x-a < \delta_1$ ならば $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$」,「$-\delta_2 < x-a < 0$ ならば $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$」となるようなものをとることができる．そこで $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと，$0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$ となる．□

命題 6.3. 区間 I から a を取り除いた集合で定義された関数 f が $x \to a$ で正の数 α に収束するならば，次をみたす正の数 δ が存在する：「$0 < |x-a| < \delta$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $f(x) > 0$ である.」

[*] 2013 年 11 月 12 日 (2013 年 11 月 12 日訂正)

[1] ここの定義を，習慣的に使う文字を用いて “ε-δ 式の定義” という．コーシー (Augustin Louis Cauchy, 1789–1857 Fr) によるものらしい．

[2] δ: delta.

証明. 定義 6.1 の条件が成り立っているのだから，とくに $\varepsilon = \alpha/2$ とおいてやれば「$0 < |x-a| < \delta$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $|f(x)-\alpha| < \frac{\alpha}{2}$ が成り立つ」ような δ が存在する．このとき，$0 < |x-a| < \delta$ ならば

$$f(x) - \alpha > -\frac{\alpha}{2} \qquad \text{すなわち} \qquad f(x) > \frac{\alpha}{2} > 0$$

が成り立つ. □

さらに，無限大に発散する数列（定義 5.3）に倣って関数が無限大に発散する，などの定義を与えよう：

定義 6.4. (1) 区間 I から $a \in I$ を除いたところで定義された関数 f が $x \to a$ で正の無限大に発散するとは，次が成り立つことである：

任意の実数 M に対して以下をみたす正の数 δ が存在する：$0 < |x-a| < \delta$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $f(x) > M$.

このことを「$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$」「$f(x) \to +\infty\ (x \to a)$」と書く．

(2) 数直線上の区間 $(b, +\infty)$ で定義された関数 f が $x \to +\infty$ で実数 α に収束するとは，次が成り立つことである：

任意の正の数 ε に対して以下をみたす正の数 $m\ (> b)$ が存在する：

$x > m$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$.

このことを「$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$」「$f(x) \to \alpha\ (x \to +\infty)$」と書く．

(3) 数直線上の区間 $(b, +\infty)$ で定義された関数 f が $x \to +\infty$ で正の無限大に発散するとは，次が成り立つことである：

任意の実数 M に対して以下をみたす正の数 $m\ (> b)$ が存在する：

$x > m$ をみたす任意の $x \in I$ に対して $f(x) > M$.

このことを「$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$」「$f(x) \to +\infty\ (x \to +\infty)$」と書く．

負の無限大に発散すること，x を負の無限大にとばす極限についても同様に定義することができる（問題 6-2）.

この講義では，関数の極限の議論を行う際に，なるべく ε-δ 式を直接用いずに，次の定理によって数列の極限の問題に帰着させることにする．

定理 6.5. 区間 I から $a \in I$ を除いた $I \setminus \{a\}$ で定義された関数 f が $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ をみたすための必要十分条件は，

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad a_n \in I \setminus \{a\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

をみたす**任意の**数列 $\{a_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\alpha$ が成り立つことである．

証明．〔必要性〕$f(x)\to\alpha$ $(x\to a)$ が成り立っているとする．いま，条件 $(*)$ をみたす数列 $\{a_n\}$ をとる時，$f(a_n)\to\alpha$ $(n\to\infty)$ であることを示したい：正の数 ε を任意に取ると，$f(x)\to\alpha$ であることから「$0<|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$」をみたす正の数 δ が存在する．ここで $a_n\to a$ であるから，この δ に対して「$n\geqq N$ ならば $|a_n-a|<\delta$」となるような番号 N をとることができる．とくに条件 $(*)$ から $a_n\neq a$ なので，ここでとった N に対して

$$n\geqq N \qquad\Rightarrow\qquad 0<|a_n-a|<\delta \qquad\Rightarrow\qquad |f(a_n)-\alpha|<\varepsilon$$

となる．ε は任意だったので $f(a_n)\to\alpha$ が得られた．

〔十分性〕対偶を示す．すなわち「$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ でない」ことを仮定して，結論「(任意の数列 $\{a_n\}$ が $(*)$ をみたすならば $f(a_n)$ は α に収束する）でない」を導く．仮定，結論を書き換えると（節末の補足参照）

仮定： 次をみたす ε が存在する：任意の正の数 δ に対して，$0<|x-a|<\delta$ かつ $|f(x)-\alpha|\geqq\varepsilon$ となる x がとれる．

結論： 次をみたす数列 $\{a_n\}$ が存在する：$(*)$ をみたし，$f(a_n)$ は α に収束しない．

この仮定をみたす正の数 ε をとって固定しておく．このとき，任意の番号 n に対して $\delta=1/n$ とおけば，$0<|a_n-a|<\frac{1}{n}$ かつ $|f(a_n)-\alpha|\geqq\varepsilon$ となるような a_n をとることができる．こうして得られた数列 $\{a_n\}$ は条件 $(*)$ をみたす（確かめよ）．一方，$|f(a_n)-\alpha|\geqq\varepsilon$ がすべての n に対して成り立つから $\{f(a_n)\}$ は α に収束しない．□

注意 6.6. 定理 6.5 を否定することで，関数 f が $x\to a$ で α に収束しないための必要十分条件は，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a, \qquad \text{かつ} \qquad \{f(a_n)\}\ \text{は}\ \alpha\ \text{に収束しない}$$

となるような数列 $\{a_n\}$ が存在することである[4]．

6.2 連続関数

定義 6.7. 区間 I で定義された関数 f が I の点 a で**連続**であるとは，

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

をみたすことである．とくに，I の各点で連続な関数を**区間 I で連続**という．

[4] 定理 6.5 の状況で，収束をいうためには a に収束する**任意の**数列 $\{a_n\}$ に対して $\{f(a_n)\}$ が α 収束することを言わなければならないが，収束しないことをいうためには，$\{f(a_n)\}$ が α に収束しないような $\{a_n\}$ をひとつ見つければよい．

注意 6.8. 次の (1), (2) はそれぞれ，区間 I 上の関数 f が $a\in I$ で連続であるための必要十分条件である．

(1) 任意の正数 ε に対して次をみたす正の数 δ が存在することである：「$|x-a|<\delta$ をみたす任意の $x\in I$ に対して $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成り立つ．」（定義 6.1[5][6]）

(2) 区間 I 内の任意の数列 $\{a_n\}$ が a に収束するならば $f(a_n)$ は $f(a)$ に収束する（定理 6.5）．

問題 6-5 を用いれば，次がすぐわかる．

命題 6.9. 区間 I 上で定義された関数 f, g が連続なら

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \quad (fg)(x)=f(x)g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

で定まる $f+g$, fg, f/g は I 上で連続である．ただし，最後の場合は $g(x)\neq 0$ が各 $x\in I$ で成り立っているとする．

例 6.10. (1) 定数関数，恒等関数[7]$\mathrm{id}(x)=x$ は $\mathbb{R}$ で連続である．

(2) 多項式で与えられる関数は $\mathbb{R}$ で連続である．実際，多項式は定数関数と恒等関数から足し算と掛け算によって得られる．

(3) 有理関数，すなわち (多項式)/(多項式) の形の関数は，分母が 0 にならないような区間で連続である．

(4) 微分可能な関数は連続である（定理 1.1）．

◇

例 6.11. 関数 f が a を含む開区間でで C^1-級（3ページ）で，$f'(a)>0$ が成り立っているならば，f が I 上で単調増加であるような a を含む開区間 I が存在する．実際，C^1-級であることから $f'(x)$ は連続だから $\lim_{x\to a} f'(x)=f'(a)>0$.

[5] 定義 6.1 では，条件の中に "$0<|x-a|<\delta$" というフレーズがあるが，ここでは "$|x-a|<\delta$" と "$0<$" の部分が抜けている．ここで扱うケースでは $|x-a|=0$，すなわち $x=a$ のときは自動的に $|f(x)-f(a)|=|f(a)-f(a)|=0<\varepsilon$ となるので，$x=a$ を除外する必要がない．

[6] 区間 I が閉区間で，a が区間の端点の場合，連続性の定義を右または左極限でするべきかもしれないが，たとえば，点 a が区間の左端のとき，定義 6.1 は $x\to a+0$ の極限をとっていることと同じである．実際，"$0<|x-a|<\delta$ をみたす $x\in I$" は，"a が区間の左端のときは $a<x<a+\delta$ をみたす x" のことである．

[7] x に対して x それ自身を対応させる関数を恒等関数 the identity function という．

したがって，命題 6.3 から $0 < |x - a| < \delta$ ならば $f'(x) > 0$ となる正の数 δ が存在する．このことと定理 1.11 から f は区間 $(a - \delta, a + \delta)$ で単調増加である．例 1.3 と比較せよ． ♢

6.3 補足：ド・モルガンの法則

今回使った「収束することの否定」を記述するために，ド・モルガンの法則[8]の復習をしておく．ここでは，P, Q, R などで，真・偽いずれかの値をとる文を表すこととする[9][10]．このとき，次のように定める[11]

- 「P かつ Q」は，P，Q がともに真のとき真，それ以外は偽.
- 「P または Q」は，P，Q がともに偽のとき偽，それ以外は真.
- 「P でない」は P の真・偽を入れ替える.
- 「P ならば Q」は P が真で Q が偽となるとき偽，それ以外は真.

とくに

(6.1) 「P ならば Q」 は 「(P でない) または Q」 と同値

である．次の**ド・モルガンの法則**は高等学校でも習ったかもしれない：

事実 6.12 (ド・モルガンの法則).

「(P かつ Q) でない」 は「(P でない) または (Q でない)」と同値，
「(P または Q) でない」は「(P でない) かつ (Q でない)」 と同値.

事実 6.12 と (6.1) から

(6.2) 「(P ならば Q) でない」 は 「P かつ (Q でない)」 と同値.

さて，不定の文字 x を含む文 $P(x), Q(x)$ に対して

8) ド・モルガンの法則：de Morgan's laws; ド・モルガン：Augustus de Morgan, 1806–1871,
9) きちんと論理学の記号・用語にしたがって形式的に説明するべきだろうが，ここでは直観が働くよう，日常用語によって説明する．本来証明が必要なところも端折ることにする．
10) 真：true; 偽：false.
11) P かつ Q：P and Q; P または Q：P or Q; P でない：not P; P ならば Q：P implies Q.

- 「すべての x に対して $P(x)$」
- 「ある x に対して $P(x)$」すなわち「$P(x)$ となる x が存在する」

という形の文を全称命題（前者），特称命題（後者）という.

例 6.13. (1) 「任意の実数 x に対して $x^2 \geqq 0$ である」という文はすべての実数 x を “$x^2 \geqq 0$” に代入した「$0^2 \geqq 0, 1^2 \geqq 0, (-1)^2 \geqq 0, \pi^2 \geqq 0 \dots$」という無限個の言明がすべて真なので，真である.

(2) 「任意の実数 x に対して $x^2 > 0$ である」という文はすべての実数 x を “$x^2 \geqq 0$” に代入した「$0^2 > 0, 1^2 > 0, (-1)^2 > 0, \pi^2 > 0 \dots$」という無限個の言明のうち，最初の 1 つが偽なので偽である.

(3) 「ある実数 x に対して $x^2 \leqq 0$ である」という文はすべての実数 x を “$x^2 \geqq 0$” に代入した「$0^2 \leqq 0, 1^2 \leqq 0, (-1)^2 \leqq 0, \pi^2 \leqq 0 \dots$」という無限個の言明のうち，最初の 1 つが真なので真である.

(4) 「ある実数 x に対して $x^2 < 0$ である」という文はすべての実数 x を “$x^2 \geqq 0$” に代入した「$0^2 < 0, 1^2 < 0, (-1)^2 < 0, \pi^2 < 0 \dots$」という無限個の言明のすべてが偽なので偽である. ♢

例 6.13 のように，全称命題は，考えている x の範囲全体にわたって $P(x)$ を “and” でつなげたもの，全称命題は，考えている x の範囲全体にわたって $P(x)$ を “or” でつなげたものとみなせる．これらの否定についても，有限個の and, or の場合と同様の法則が成り立つ：

事実 6.14 (ド・モルガンの法則 2).

(1) 「(すべての x に対して $P(x)$ が成り立つ) でない」は「ある x に対して $P(x)$ が成り立たない」と同値.

(2) 「(ある x に対して $P(x)$ が成り立つ) でない」は「すべての x に対して $P(x)$ が成り立たない」と同値.

例 6.15. (1) $P =$「**数列 $\{a_n\}$ が α に収束する**」の否定，すなわち「$\{a_n\}$

が α に収束しない」ことの言い換えを与えよう．定義 5.2 から P は

任意の正の数 ε に対して

$$\Bigl[\text{ある自然数 } N \text{ が存在して}\Bigl(\text{すべての自然数 } n \text{ に対して } \bigl\{n \geqq N \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \varepsilon\bigr\}\Bigr)\Bigr]$$

であるから，順番に事実 6.14, (6.2) を適用して,「P でない」は

ある正の数 ε に対して

$$\Bigl[\text{任意の自然数 } N \text{ に対して}\Bigl(\text{ある自然数 } n \text{ が存在して } \bigl\{n \geqq N \text{ かつ } |a_n - \alpha| \geqq \varepsilon\bigr\}\Bigr)\Bigr]$$

となる．これをもう少し書き換えると「$\{a_n\}$ が α に収束しない」とは

「次をみたす正の数 ε が存在する：任意の番号 N に対して
$n \geqq N$ かつ $|a_n - \alpha| \geqq \varepsilon$ となる n をとることができる.」

(2) 同様に「$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ でない」は（問題 6-4）
「次をみたす正数 ε が存在する：任意の正の数 δ に対して
$0 < |x - a| < \delta$ かつ $|f(x) - \alpha| \geqq \varepsilon$ となる x がとれる.」 $\diamondsuit$

問　題　6

6-1 定義 6.1 の右極限の真似をして左極限値の定義を作りなさい.

6-2 定義 6.4 に倣って

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty, \dots$$

であることの定義を作りなさい.

6-3 定理 6.5 に倣って，問題 6-2 の各々が成り立つための必要十分条件を数列を用いて述べなさい.

6-4 例 6.15 (2) を確かめなさい.

6-5 区間 I から a を抜いた $I \setminus \{a\}$ で定義された関数 f, g が，$x \to a$ のときに α, β に収束してるとする．このとき

$$f(x) + g(x) \to \alpha + \beta, \qquad f(x)g(x) \to \alpha\beta, \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{\alpha}{\beta}$$

が成り立つ．ただし，最後の式では $\beta \neq 0$ とする.（ヒント：定理 6.5 と，数列の極限に関する補題 5.7 を用いる.）

6-6 次で定義される関数 f, g を考える：

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}, \qquad g(x) := \{f(x)\}^2.$$

このとき

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to-0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to+0} g(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to-0} g(x)$ を求めなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x)$ を求めなさい.

(3) f, g は 0 で連続か.

7. 連続関数の性質

第 2 回に与えた平均値の定理の証明で，連続関数に関する最大・最小値の定理（定理 2.1）を用いた．今回はそれに証明を与えよう．そのために，実数の連続性公理 5.12 のいくつかの言い換えを説明する．

7.1 区間縮小法

定理 7.1 (ワイエルストラス[1]の区間縮小法)**.** 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が条件

(1) 各番号 n に対して $a_n < b_n$,

(2) $\{a_n\}$ は単調非減少，$\{b_n\}$ は単調非増加,

(3) $b_n - a_n$ は $n \to \infty$ で 0 に収束する．

をみたすなら，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は共通の極限値 c に収束する．とくに c は，すべての番号 n に対して $a_n \leqq c \leqq b_n$ をみたす唯一の実数である．

注意 7.2. 定理 7.1 が「区間縮小法」[2]とよばれるのは以下による：仮定 (1) から $I_n := [a_n, b_n]$ は空でない閉区間；仮定 (2) から各 n に対して $I_n \supset I_{n+1}$, すなわち $\{I_n\}$ は入れ子になった区間の列；仮定 (3) から区間 I_n の長さが 0 に近づく．これらの仮定のもと，結論は「すべての区間 I_n に共通に含まれるただ一つの実数 c が存在する」ということである．

定理 7.1 の証明. 仮定 (1)，(2) より，任意の番号 n に対して

$$a_n < b_n \leqq b_{n-1} \leqq \dots \leqq b_1 \leqq b_0, \qquad b_n > a_n \geqq a_{n-1} \geqq \dots \geqq a_1 \geqq a_0$$

なので，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ はそれぞれ上に有界な単調非減少数列，下に有界な単調非増加数列である．したがって連続性の公理 5.12 からこれらはそれぞれ極限値 α, β に収束する．ここで仮定 (3) と補題 5.7 から $\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ なので $\beta = \alpha$．ここですべての番号 n に対して $a_n \leqq x$ が成り立つなら，補題 5.8 の (1) と補題 5.7 (1) から $\alpha \leqq x$．同様に，すべての n に対して $b_n \geqq x$ が成り立つなら $x \leqq \alpha$．したがって，結論が成り立つ． □

[*] 2013 年 11 月 19 日

[1] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815–1897, De.

[2] 区間縮小法の定理：the nested interval theorem.

7.2 上限・下限

定義 7.3. 実数の集合 $X \subset \mathbb{R}$ が**上に有界**（**下に有界**）であるとは,「任意の $x \in X$ に対して $x \leqq M$ $(x \geqq M)$」をみたすような実数 M が存在することである．この実数 M のことを X の**上界**（**下界**）という[3]．集合 X が上に有界かつ下に有界なときに，X は**有界**であるという．

注意 7.4. 数列 $\{a_n\}$ が上に有界である（定義 5.9）ことと，$\{a_n\}$ の全ての項を集めた集合が定義 7.3 の意味で上に有界であることは同値である．

定義 7.5. 集合 X の要素 M が X の上界（下界）であるとき，M を X の**最大値**（**最小値**）という[4]．

また，集合 X の上界 M に対して，それより小さい X の上界が存在しないとき，M を X の**上限**という[5]．同様に X の下界 M に対して，それより大きい X の下界が存在しないとき M を X の**下限**という．

例 7.6. (1) 区間 $I = [0, 1]$ に対して 1 以上の任意の実数は I の上界，1 は I の上限，1 は I の最大値である．

(2) 区間 $J = (0, 1)$ に対して 1 以上の任意の実数は J の上界，1 は J の上限であるが，$1 \notin J$ なので 1 は J の最大値ではない．

(3) 集合 X が最大値（最小値）をもてば，それが上限（下限）である．

(4) 集合 X の上限（下限）が X の要素ならば，それは X の最大値（最小値）である． ◇

注意 7.7. 実数 α が集合 $X \subset \mathbb{R}$ の上限であるための必要十分条件は

(1) 任意の $x \in X$ に対して $x \leqq \alpha$ が成り立つ．

(2) 任意の正の数 ε に対して $\alpha - \varepsilon < x$ をみたす $x \in X$ が存在する．

実際，(1) は α が X の上界であることを表す．また，(2) は α より小さい数（$\alpha - \varepsilon$ と表している）は X の上界ではないということを表している．下限の場合に対応する条件を書いてみよ（問題 7-1）．

[3] 上界：an upper bound; 下界：a lower bound.

[4] 最大値：the maximum; 最小値：the minimum.

[5] 上限:the lowest upper bound, the supremum; 下限:the highest lower bound, the infinimum.

定理 7.8 (上限・下限の存在（実数の連続性）)**.** 上に（下に）有界な実数の部分集合 X は上限（下限）をもつ.

注意 7.9. 定理 7.8 は実数の連続性（公理 5.12）の異なる表現とみなせる（問題 7-7）. とくに定理 7.8 は有理数に対しては成立しない. 実際, 有理数の集合 $X \subset \mathbb{Q}$ を $X := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 \leqq 2\}$ とすると[6], X は上に有界な $\mathbb{Q}$ の部分集合である. 実際 2 は X の上界であるが, 有理数の範囲で上界の最小値は存在しない.

定理 7.8 の証明. 集合 X が上に有界であるとして, その上界の一つを M とする. いま $x_0 \in X$ をひとつとると $x_0 \leqq M$ である. そこで, 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$
\begin{aligned}
&a_0 := x_0 - 1, \qquad b_0 := M,\\
&(a_{j+1}, b_{j+1}) := \begin{cases} \left(\dfrac{a_j+b_j}{2}, b_j\right) & \left(\dfrac{a_j+b_j}{2} \text{ が } X \text{ の上界でないとき}\right) \\ \left(a_j, \dfrac{a_j+b_j}{2}\right) & \left(\dfrac{a_j+b_j}{2} \text{ が } X \text{ の上界であるとき}\right) \end{cases} \quad (j \geqq 0)
\end{aligned}
$$

と定める. すると, これらの数列は定理 7.1 の条件をみたす（問題 7-2）. 実際 $I_j := [a_j, b_j]$ とすると, I_{j+1} は I_j を二等分した区間のうち一方となっている. したがって, 区間縮小法（定理 7.1）により $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は同じ極限値 c に収束する. 以下, この c が X の上限であることを示す.

まず, 注意 7.7 (1) が成り立つ. 実際, b_0 はとり方から X の上界. もし b_j が X の上界ならば, b_{j+1} はそのとり方から X の上界なので, 数学的帰納法の原理から各 b_n は X の上界. したがって, 各 $x \in X$ をひとつ固定すると $x \leqq b_n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ が成り立つので, 極限をとると $x \leqq c$（補題 5.8 (1)）. すなわち, 任意の $x \in X$ に対して $x \leqq c$ が成り立つ.

一方, 各番号 n に対して $a_n < x$ をみたす X の要素 x が存在する. 実際, $a_0 < x_0 \in X$ である. また, $a_j < x$ をみたす X の要素 x が存在すると仮定すると,

- $(a_j + b_j)/2$ が X の上界ならば, $a_{j+1} = a_j$ だから $a_{j+1} < x$ をみたす $x \in X$ が存在する.
- $(a_j + b_j)/2$ が X の上界でないならば, この値が a_{j+1} だから $a_{j+1} < x$ となる $x \in X$ が存在する.

このことから, 注意 7.7 (2) が成り立つことを示そう：任意の正の数 ε をとると, $\{a_n\}$ が c に収束することから「$n \geqq N$ ならば $|a_n - c| < \varepsilon$」となる番号 N が存在する. この N に対して $c - \varepsilon < a_N$ なので $c - \varepsilon < a_N < x$ をみたす $x \in X$ が存在する.

以上から c が X の上限である. 下限の場合も同様にすればよい（問題 7-3）. □

[6] 有理数全体の集合 the set of rational numbers を $\mathbb{Q}$ で表す.

記号 7.10. 実数の集合 X が上に有界（下に有界）のとき, その上限（下限）を $\sup X$ $(\inf X)$ と表す.

集合 $X \subset \mathbb{R}$ が上に有界でない（下に有界でない）ときは, $\sup X = +\infty$ $(\inf X = -\infty)$ と書く.

この記号を用いると, $\mathbb{R}$ の部分集合 X, Y に対して

$$
\begin{aligned}
\sup(X \cup Y) &= \max\{\sup X, \sup Y\},\\
\inf(X \cup Y) &= \min\{\inf X, \inf Y\}
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

が成り立つ[7]（問題 7-5）.

7.3 関数の値の上限・下限

区間 I で定義された関数 f に対して, その値をすべて集めてできる集合

$$
f(I) := \{f(x) \,|\, x \in I\}
\tag{7.2}
$$

を f の**像**または「f による区間 I の像」という[8]. すなわち

- 数 y が $f(I)$ の要素であるための必要十分条件は, $f(x) = y$ となる $x \in I$ が存在することである.
- 数 y が $f(I)$ の要素でないための必要十分条件は, どんな $x \in I$ に対しても $y \neq f(x)$ となることである.

例 7.11. (1) 開区間 $I = (-1, 1)$ で定義された関数 $f(x) = x^2$ に対して, $f(I) = [0, 1)$ である.

(2) 区間 $J = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上の関数 $f(x) = \tan x$ に対して $f(J) = \mathbb{R}$ である.

(3) 関数 $f(x) = \tanh x$ に対して $f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$ である. ◇

関数 f が（I で）**上に有界**（**下に有界**, **有界**）であるとは, その像 $f(I)$ が上に有界（下に有界, 有界）となる（定義 7.3 参照）ことである. とくに像

[7] $X \cup Y$ は X と Y の合併集合 the union of X and Y を表す. $\max\{a, b\}$, $\min\{a, b\}$ はそれぞれ a, b のうち小さくない方, 大きくない方を表すが, $\max\{a, +\infty\} = +\infty$, $\min\{a, -\infty\} = -\infty$ と約束しておく.

[8] 像：the image.

$f(I)$ の上限・下限を

$$\sup_I f = \sup_{x\in I} f(x) := \sup f(I) = \sup\{f(x) \mid x \in I\}$$
$$\inf_I f = \inf_{x\in I} f(x) := \inf f(I) = \inf\{f(x) \mid x \in I\}$$

と書く（記号 7.10）．たとえば，像 $f(I)$ が上に有界でない，ということは

$$\sup_I f = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{l}\text{任意の実数 } M \text{ に対して } f(x) > M \text{ を}\\ \text{みたす } x \in I \text{ が存在する}\end{array}\right) \tag{7.3}$$

と表される．

注意 7.12. 区間 I で定義された関数 f に対して，$f(c) = \sup_I f$（$f(c) = \inf_I f$）をみたす I の点 c が存在するならば，f は c で最大値（最小値）をとる．

7.4 最大・最小値の定理

定理 7.13 (最大・最小値の定理（定理 2.1））**.** 閉区間 $I = [a, b]$ で連続な関数 f は，I で最大値・最小値をとる．

補題 7.14. 閉区間 $I = [a, b]$ で連続な関数 f の像 $f(I)$ は有界である．

証明. いま $f(I)$ が上に有界でないとして矛盾を導こう．このとき I を二つに分けた区間 $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ のいずれか少なくとも一方では f は上に有界でない．実際，(7.1) から両方の区間で上に有界ならば，I でも有界となって矛盾が生じる．

このことに注意して，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を，$a_0 := a$, $b_0 := b$, 各番号 $j \geqq 0$ に対して

$$(a_{j+1}, b_{j+1}) := \begin{cases} \left(\dfrac{a_j+b_j}{2}, b_j\right) & \left(\left[\dfrac{a_j+b_j}{2}, b_j\right] \text{ で } f \text{ が上に有界でないとき}\right) \\ \left(a_j, \dfrac{a_j+b_j}{2}\right) & \left(\left[\dfrac{a_j+b_j}{2}, b_j\right] \text{ で } f \text{ が上に有界であるとき}\right) \end{cases}$$

と定める．すると，各 n に対して，区間 $[a_n, b_n]$ で f は上に有界でないので， $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ かつ $f(c_n) \geqq n$ をみたすような数 c_n をとることができる．これにより，新しい数列 $\{c_n\}$ が定義された．数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は区間縮小法（定理 7.1）の条件をみたしているので，共通の極限値 $c \in [a, b]$ に収束する．さらに $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ だから $\{c_n\}$ も同じ c に収束する（補題 5.8）．

仮定より f は c で連続だから，定理 6.5 により $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = f(c)$ が成り立つ．一方，$\{c_n\}$ のとり方から $f(c_n) \geqq n$ なので $\{f(c_n)\}$ は正の無限大に発散する．これは矛盾であるから f は I で上に有界である．下に有界であることも同様に示される．□

定理 7.13 の証明. 補題 7.14 から f は I で有界なので，$f(I)$ の上限を α とおく．このとき，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を $a_0 := a$, $b_0 := b$, 各番号 $j \geqq 0$ に対して $J := \left[\frac{a_j+b_j}{2}, b_j\right]$ とおいて

$$(a_{j+1}, b_{j+1}) := \begin{cases} \left(\dfrac{a_j+b_j}{2}, b_j\right) & \left(\sup_J f = \alpha \text{ のとき}\right) \\ \left(a_j, \dfrac{a_j+b_j}{2}\right) & \left(\sup_J f \neq \alpha \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

と定める．すると，(7.1) から各 n に対して区間 $I_n := [a_n, b_n]$ の f の上限は α である．とくに，各 n に対して

$$a_n \leqq c_n \leqq b_n, \qquad \alpha - \frac{1}{n} < f(c_n) \leqq \alpha \tag{$*$}$$

となる数 c_n をとることができる（注意 7.7）．これで，新しい数列 $\{c_n\}$ が定義された．このとき，補題 7.14 と同様の議論で，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ は同じ極限値 c に収束する．

仮定より f は c で連続だから，定理 6.5 により $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = f(c)$ 成り立つが，とくに $(*)$ から $f(c) = \alpha = \sup_I f$ である．したがって f は $c \in [a, b]$ で最大値をとる（注意 7.12）．最小値の存在も同様に示される．□

7.5 中間値の定理

高等学校で学んだ中間値の定理[9]も，最大・最小値の定理と同様，実数の連続性の帰結である．この定理に証明を与えよう．

定理 7.15. 閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 f が $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ をみたすならば，$f(c) = 0$, $a < c < b$ をみたす実数 c が少なくともひとつ存在する．

証明. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を $a_0 := a$, $b_0 := b$, 各番号 $j \geqq 0$ に対して

$$(a_{j+1}, b_{j+1}) := \begin{cases} \left(\dfrac{a_j+b_j}{2}, b_j\right) & \left(f\left(\dfrac{a_j+b_j}{2}\right) < 0 \text{ のとき}\right) \\ \left(a_j, \dfrac{a_j+b_j}{2}\right) & \left(f\left(\dfrac{a_j+b_j}{2}\right) \geqq 0 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

と定める．すると，各 n に対して $f(a_n) < 0$, $f(b_n) \geqq 0$ が成り立つ．定理 7.13 の証明などと同様に $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は同じ極限値 $c \in [a, b]$ に収束するが，f の連続性から

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqq 0, \qquad f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geqq 0$$

が成り立つので $f(c) = 0$．さらに，仮定より $f(a)$, $f(b)$ は 0 でないので $a < c < b$ が成り立つ．□

[9] 中間値の定理：the intermediate value theorem.

例 7.16 (冪乗根)**.** 正の実数 α と正の整数 n に対して

(7.4) $c^n = \alpha$ となる正の実数 c がただ一つ存在する.

この c を α **の** n **乗根**[10] という.

事実 (7.4) を示そう.

ただ一つであること：二つの正の数 c_1, c_2 が $c_1^n = c_2^n = a$ をみたすならば,

$$0 = c_1^n - c_2^n = (c_1 - c_2)(c_1^n + c_1^{n-1}c_2 + \cdots + c_1 c_2^{n-1} + c_2^n)$$

となるが, 右辺の 2 つめの因子は正だから 0 でない. したがって $c_1 = c_2$[11].

存在すること：(1) $\alpha = 1$ の場合は $c = 1$ とすればよい. (2) $0 < \alpha < 1$ のとき $I = [0, 1]$, $f(x) = x^n - \alpha$ とすると, f は I で連続（例 6.10）かつ $f(0) = -\alpha < 0$, $f(1) = 1 - \alpha > 0$ が成り立つので, 中間値の定理 7.15 から $f(c) = 0$ $(0 < c < 1)$ をみたす c が存在する. それが求めるものである. (3) $\alpha > 1$ ならば $J = [0, \alpha]$, $f(x) = x^n - \alpha$ に対して, $f(0) < 0$, $f(\alpha) = \alpha^n - \alpha = \alpha(\alpha^{n-1} - 1) > 0$ であるから中間値の定理から結論が得られる. ♢

例 7.17 (逆関数)**.** 関数 f は区間 $[a, b]$ で連続, かつ単調増加であるとする. このとき,

(7.5) 任意の $y \in f(I)$ に対して $f(x) = y$ をみたす $x \in [a, b]$ がただ一つ存在する.

実際, $F(x) = f(x) - y$ に対して中間値の定理を適用すればよい. とくに $y \in f(I)$ は任意にとれるから,

$$\mathbb{R} \supset f(I) \ni y \longmapsto \text{“}f(x) = y \text{ をみたす } x\text{''} \in \mathbb{R}$$

により新しい関数が定義される. この関数を f の**逆関数**とよび f^{-1} と書く[12]. 連続関数 f の逆関数 f^{-1} は $f(I)$ で連続である（問題 7-6）. ♢

[10] α の n 乗根: the n-th root of α; 平方根: the square root; 立方根: the cubic root.
[11] これは高等学校の範囲.
[12] 逆関数：the inverse function; f^{-1}: the inverse of f.

問　題　7

7-1 注意 7.7 に倣って実数 α が $X \subset \mathbb{R}$ の下限であるための条件を書きなさい.

7-2 定理 7.8 の $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が定理 7.1 の仮定をみたしていることを確かめなさい.

7-3 定理 7.8 の上限の場合の証明をまねして下限の場合の証明を作りなさい.

7-4 区間 $(a, +\infty)$ で定義された関数 f が

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$ をみたすとは, 任意の正の数 ε に対して次をみたす数 M が存在することである：$x > M$ をみたす任意の x に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$.
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ をみたすとは, 任意の正の数 A に対して次をみたす数 M が存在することである：$x > M$ をみたす任意の x に対して $f(x) > A$.

(1) この定義に倣って, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ の定義を述べなさい.

(2) 多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ に対して

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & (a_n > 0 \text{ のとき}) \\ -\infty & (a_n < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つことを示しなさい. $x \to -\infty$ の場合はどうか（ヒント：a_n の符号と n の偶奇で場合が分かれる）.

(3) 奇数次の多項式は少なくともひとつ実根（多項式 $f(x)$ に対して $f(c) = 0$ となる実数 c）をもつことを, 中間値の定理 7.15 を用いて示しなさい.（中間値の定理の仮定をみたすような区間をどうやってとるか.）

(4) 関数 e^x は多項式で表せないことを示しなさい.（ヒント：$x \to \pm\infty$ の極限を考えよ.）

7-5* 式 (7.1) が成り立つことを確かめなさい.
（注意：$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ または } x \in Y\}$.）

7-6* 例 7.17 で得られた逆関数 f^{-1} は $f(I)$ で連続であることを確かめなさい.

7-7* 連続性の公理 5.12 を未知とし, 定理 7.8 が成り立つことを認めて, 公理 5.12 の主張が成り立つことを示しなさい. すなわち, 上限・下限の存在を認めて, 上に有界な単調非減少数列が収束することを示しなさい.（ヒント：$\{a_n\}$ を上に有界な単調非減少数列として, そのすべての項を集めてできる集合を A とすると A は上に有界. したがって $\alpha := \sup A$ が存在するが, それが極限値である.）

8. 級数

8.1 級数の収束・発散

数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{8.1}$$

の**形**を**級数**または**無限級数**という[1]．級数 (8.1) に対して

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{8.2}$$

によって新たな数列 $\{s_n\}$（部分和）を定義する[2]．

定義 8.1. 級数 (8.1) が**収束する**とは，式 (8.2) で与えられる数列 $\{s_n\}$ が収束することである．このとき，$\{s_n\}$ の極限値 c を級数 (8.1) の**和**とよび，

$$c = a_0 + a_1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

と表す[3]．収束しない級数は**発散する**という．

定理 8.2. 級数 (8.1) が収束するならば，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する．

証明. 一般に収束する数列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して $q_n = p_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ で定まる数列 $\{q_n\}$ は同じ極限値に収束する（問題 8-2）．

級数の和を c とすると，式 (8.2) の $\{s_n\}$ と $\{t_n = s_{n+1}\}$ はどちらも c に収束する．したがって

$$0 = c - c = \lim_{n\to\infty} t_n - \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (t_n - s_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n. \quad \square$$

*) 2013 年 11 月 26 日 (2013 年 11 月 26 日訂正)

[1] 級数：a series; 無限級数：an infinite series; 式 (8.1) は一般に数を表すのではなく，a_j を記号 “+” でつないで並べた “絵” とみなす．

[2] 式 (8.2) の右辺は有限個の和なので，s_n はひとつの数である．

[3] すなわち，(8.1) は，収束するときに限り，一つの数を表すことになる．

定理 8.2 の対偶をとれば

系 8.3. 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない[4]ならば級数 (8.1) は発散する．

例 8.4. 定理 8.2 の逆は成立しない．実際，次の例がある[5]：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{であるが} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{は発散する．}$$

このことを確かめよう．部分和を $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ とおく．正の整数 m に対して $n \geqq 2^m - 1$ をみたす番号 n を任意にとると，

$$\begin{aligned} s_n \geqq s_{2^m-1} &= \sum_{k=1}^{2^m-1} \frac{1}{k} = \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{k=2^{l-1}}^{2^l-1} \frac{1}{k} \right) \\ &\geqq \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{k=2^{l-1}}^{2^l-1} \frac{1}{2^l} \right) = \sum_{l=1}^{m} \frac{2^{l-1}}{2^l} = \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

番号 m は任意にとれるので，とくに $\{s_n\}$ は正の無限大に発散する（定義 5.3 の条件をみたすことは各自確かめよ）．この級数を**調和級数**という[6]．◇

例 8.5. 実数 r に対して初項 1，公比 r の**等比級数**は $|r| < 1$ のとき収束し，

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \qquad (|r| < 1 \text{ のとき})$$

となり，それ以外の場合は発散する．実際，例 5.21 より $|r| \geqq 1$ なら $\{r^n\}$ は 0 に収束しないので，系 8.3 より考えている級数は発散する．一方，$|r| < 1$ のときは例 5.21 から

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} \to \frac{1}{1-r}$$

となるので，結論が得られる．◇

[4] このことは $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ とは異なる．例 6.15 を参照のこと．

[5] 式 (8.1) では添字が 0 から始まっているが，この例では添字が 1 から始まる．問題の性質によって添字の番号の付け方が異なるが，適切に読み替えて欲しい．

[6] 調和級数：the harmonic progression; 等比級数：a geometric progression（幾何級数）; 等差級数：an arithmetic progression（算術級数）．

8.2 正項級数

数列 $\{a_n\}$ の各項が $a_n \geqq 0$ をみたすとき，級数 (8.1) は**正項級数**とよばれる[7]．級数 (8.1) が正項級数であるとき，(8.2) で定義される部分和 $\{s_n\}$ は単調非減少数列だから，上に有界なら収束し（実数の連続性公理 5.12），上に有界でないなら正の無限大に発散する．このことから，次の収束判定法が得られる：

命題 8.6 (正項級数の比較)**.** 負でない実数からなる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が各 n に対して $a_n \leqq b_n$ をみたしているとする．このとき

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束するならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する．

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が発散するならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ も発散する．

証明． 部分和をそれぞれ

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad t_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$$

とおくとこれらは単調非減少数列で，仮定より $s_n \leqq t_n$（$n = 0, 1, 2, \dots$）が成り立つ．

(1): $\sum b_n$ が β に収束するならば，各番号 n に対して $t_n \leqq \beta$ なので，$s_n \leqq t_n \leqq \beta$ となる．この右辺は n に関係ない定数だから $\{s_n\}$ は上に有界．したがって s_n は収束する．

(2): $\sum a_n$ が発散するなら $\{s_n\}$ は正の無限大に発散するから，補題 5.8 より $\{t_n\}$ も正の無限大に発散する． □

注意 8.7. 級数の有限個の項を入れかえても収束・発散という性質は不変である[8]．したがって命題 8.6 の仮定は,「ある番号 N から先の番号 n に対して $a_n \leqq b_n$」とおきかえてもよい．さらに，有限個の項は負であっても構わない．

[7] 正項級数：a nonnegative-term series; 言葉の意味からは “非負項級数” というべきだが，習慣的に正項級数とよぶ．

[8] 和の値は変わる．

例 8.8. 実数 p に対して，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p = 1 + 2^p + 3^p + \dots \tag{8.3}$$

は

(1) $p \geqq -1$ ならば発散する．

(2) $p < -1$ ならば収束する[9]．

このことを示そう．番号 n を一つ固定するとき，$f(x) = n^x$ は x の単調増加関数であることに注意する．

(1): $p \geqq -1$ ならば，$n^p \geqq n^{-1} = 1/n$ なので，例 8.4 と命題 8.6 (2) から (8.3) は発散する．

(2) ($p \leqq -2$ の場合): まず $p \leqq -2$ の場合，$n \geqq 2$ に対して

$$n^p \leqq n^{-2} = \frac{1}{n^2} \leqq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

ここで

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

は 1 に収束するので，命題 8.6 の (1) から (8.3) は収束する[10]

(2) ($-2 < p < -1$ の場合): $p = -1 - q$ ($q \in (0, 1)$) とおくと，$n \geqq 2$ で

$$(n-1)^{p+1} - n^{p+1} = \frac{1}{(n-1)^q} - \frac{1}{n^q} = \frac{1}{n^q}\left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^q - 1\right)$$

である．ここで，テイラーの定理 2.9 から，ある $\theta \in (0, 1)$ に対して

[9] 収束することは示すことができるが，和を求めるのは別問題である．たとえば $p = -2$ の場合，$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ となるが，これはオイラーによって 1735 年に求められたといわれている．このような “値を求める” 問題は単なる練習問題でないことが多い．Leonhard Euler, 1707–1783, Sz.

[10] ここで，比較する数列 $1/(n(n-1))$ は $n \geqq 2$ でしか定義されていないが，級数の収束には最初の有限個の項の挙動は関わりないので $n \geqq 2$ の部分の収束を論じれば十分である（注意 8.7 参照）．

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^q = 1+\frac{q}{n-1}+\frac{q(q-1)}{2(n-1)^2}\left(1+\frac{\theta}{n-1}\right)^{q-2}$$
$$\geqq 1+\frac{q}{n-1}-\frac{q(1-q)}{2(n-1)^2} \geqq 1+\frac{q}{n-1}\left(1-\frac{1-q}{2(n-1)}\right)$$
$$= 1+\frac{q}{n-1}\left(1-\frac{1}{2(n-1)}\right) \geqq 1+\frac{q}{2(n-1)} \geqq 1+\frac{q}{2n}$$

が成り立つ．ここで $0<q<1$, $n \geqq 2$ を用いた．したがって

$$n^p \leqq \frac{2}{q}\big((n-1)^{p+1}-n^{p+1}\big) \qquad (n \geqq 2)$$

であるが，$p<0$ に注意すれば

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{q}\big((k-1)^{p+1}-k^{p+1}\big) = \frac{2}{q}\left(1-n^{p+1}\right) \to \frac{2}{q} \qquad (n\to\infty)$$

となるので，命題 8.6 の (1) から (8.3) は収束する． ♢

8.3 交代級数

項がひとつおきに符号を変えるような級数を**交代級数**[11)]という．

定理 8.9 (交代級数の和)．単調非増加で 0 に収束する数列 $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して $a_n=(-1)^n q_n$ $(n=0,1,2,\dots)$ とおくと級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q_n = q_0-q_1+q_2-q_3+\dots$$

は収束する．

証明． ある番号 n で $q_n=0$ ならば，そこから先の項はすべて 0 なので，すべての番号 n に対して $q_n>0$ となる場合のみを考えればよい．

部分和 $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_n$ を考え，正の整数 j に対して $a_j := s_{2j-1}$, $b_j := s_{2j}$ とおくと，$\{a_j\}$, $\{b_j\}$ は区間縮小法（定理 7.1）の仮定をみたす．実際，

11) 交代級数：an alternating series.

$$\begin{aligned} b_j-a_j &= s_{2j}-s_{2j-1} = (-1)^{2j}q_{2j} = q_{2j} > 0 \\ a_{j+1}-a_j &= s_{2j+1}-s_{2j-1} = (-1)^{2j+1}q_{2j+1}+(-1)^{2j}q_{2j} = q_{2j}-q_{2j+1} \geqq 0 \\ b_{j+1}-b_j &= s_{2j+2}-s_{2j} = q_{2j+2}-q_{2j+1} \leqq 0, \end{aligned}$$

さらに $q_n \to 0$ から $b_n-a_n \to 0$．したがって定理 7.1 から，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は共通の極限値 c に収束する．すなわち，任意の正の数 ε に対して番号 N_0 で

$$j \geqq N_0 \quad \text{ならば} \quad |a_j-\alpha| = |s_{2j-1}-c| < \varepsilon, \quad |b_j-\alpha| = |s_{2j}-c| < \varepsilon$$

となるものが存在する．そこで $N=2N_0-1$ とすれば「$n \geqq N$ ならば $|s_n-c|<\varepsilon$」となり $\{s_n\}$ が c に収束することがわかる． □

例 8.10． (1) 級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

は収束する．この級数は例 3.11 で現れたもので，そこでは和の値 $(\log 2)$ まで求めているが，収束することだけなら定理 8.9 だけから結論できる．

(2) 問題 3-5 の級数

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

は収束する．和は $\pi/4$ である．

(3) 級数

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$$

は収束する．第 10 回で示すようにこの値は

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\dots = \frac{1}{9}(\sqrt{3}\pi+3\log 2)$$

である． ♢

問　題　8

8-1　次は正しいか．正しければ証明を，正しくなければ反例をあげなさい．

(1)　級数 $\sum a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

(2)　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば級数 $\sum a_n$ は収束する．

8-2　数列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ が c に収束するとする．このとき，$q_n = p_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ で定まる数列 $\{q_n\}$ も c に収束することを，定義 5.2 を直接つかって示しなさい．

8-3　例 8.8 の事実を次の不等式を用いて示しなさい：

$$\frac{1}{n} = \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dx \geqq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \qquad (n = 1, 2, \dots)$$
$$\frac{1}{n} = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n}\,dx \leqq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x}\,dx \qquad (n = 2, 3, \dots).$$

8-4　次の級数の和を求めなさい．

(1)　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

ヒント：有理化

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ヒント：$\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ を考えよ．

8-5　実数 r に対して $a_n = nr^n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ とおく．

(1)　$|r| < 1$ のとき $\{a_n\}$ は 0 に収束することを示しなさい．
ヒント：$|r| = 1/(1+h)$ $(h > 0)$ とおいて $(1+h)^n \geqq 1+nh+\frac{1}{2}n(n-1)h^2$ となることを用いる．

(2)　$|r| \geqq 1$ のとき $\{a_n\}$ は発散することを示しなさい．

(3)　部分和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ を求めなさい．

ヒント：等比級数の有限項の和を求めたのと同様の方法を用いなさい．

(4)　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を求めなさい．

8-6　次の級数の収束，発散を調べなさい．ただし α は実数の定数である．

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$

9. 絶対収束・条件収束

9.1 上極限・下極限

まず記号の準備：一般に数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して次のようにおく：

$$A_n := \{a_n, a_{n+1}, \dots\} = \{a_k \mid k \geqq n\} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{9.1}$$

$$a_n^+ := \sup A_n, \qquad a_n^- := \inf A_n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{9.2}$$

補題 9.1. (1) 数列 $\{a_n\}$ が上に非有界ならば，$a_n^+ = +\infty$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

(2) 数列 $\{a_n\}$ が上に有界ならば，$\{a_n^+\}$ は各項が実数の単調非増加数列.

(3) さらに数列 $\{a_n\}$ が下に有界，すなわち $\{a_n\}$ が有界ならば，$\{a_n^+\}$ は下に有界な単調非増加数列.

証明. (1): 番号 n を固定すると，$\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ は有限集合だから上に有界．ここで A_n が上に有界ならば，数列全体が上に有界になってしまう（式 (7.1)）のでこの集合は上に非有界．したがって $a_n^+ = +\infty$.

(2): $\{a_n\}$ が上に有界ならば，A_n も上に有界だから，上限 a_n^+ が存在する．さらに $A_n \supset A_{n+1}$ だから a_n^+ は A_{n+1} の上界となるので $a_{n+1}^+ \leqq a_n^+$ が成り立つ.

(3): さらに $\{a_n\}$ が下に有界ならば，その下限を α とすると $\alpha \leqq a_n$ が各 n に対して成り立つので，$a_n^+ \geqq \alpha$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$，すなわち $\{a_n^+\}$ は下に有界. □

同様の性質が $\{a_n^-\}$ に対しても成り立つ（演習問題 9-1）.

定義 9.2. 数列 $\{a_n\}$ が上に（下に）有界であるとき (9.2) で与えられる数列 $\{a_n^+\}$ ($\{a_n^-\}$) は収束するか $-\infty$（$+\infty$）に発散する（連続性の公理 5.12）．そこで

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} a_n^+, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} a_n^-$$

と定め，それぞれ $\{a_n\}$ の**上極限**，**下極限** とよぶ[1]．とくに $\{a_n\}$ が上下に有界なら，上極限・下極限はともに有限の値である．また $\{a_n\}$ が上に（下に）非有界なときは $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ($\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$) と定める.

[*] 2013 年 12 月 3 日

[1] 上極限：the limit superior; 下極限：the limit inferior. $\limsup$ を $\overline{\lim}$，$\liminf$ を $\underline{\lim}$ と表すこともある.

例 9.3. (1) 数列 $\{(-1)^n + \frac{1}{n}\}$ の上極限は 1，下極限は -1 である.

(2) 数列 $\{-n\}$ の上極限と下極限はともに $-\infty$ である. ♢

補題 9.4. 実数 α が数列 $\{a_n\}$ の上極限であるための必要十分条件は，

(1) 任意の正の数 ε に対して次をみたす番号 N が存在する：$n \geqq N$ なる任意の n に対して $a_n < \alpha + \varepsilon$.

(2) 任意の正の数 ε と任意の番号 N に対して $m \geqq N$ かつ $\alpha - \varepsilon < a_m$ をみたす番号 m が存在する.

証明．必要性： 数列 $\{a_n^+\}$ を式 (9.2) により定めると α は a_n^+ の極限で，$\{a_n^+\}$ は単調非増加だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して「$n \geqq N$ ならば $0 \leqq a_n^+ - \alpha < \varepsilon$」が成り立つような番号 N が存在する．とくに $0 \leqq a_N^+ < \alpha + \varepsilon$ であるが，$n \geqq N$ のとき $a_n \leqq \sup A_N = a_N^+$ なので (1) が成り立つ.

一方，正の数 ε と番号 N を任意にとると，$a_N^+ = \sup A_N$ だから，$a_N^+ - \varepsilon \leqq x$ となる $x \in A_N$ が存在する（注意 7.7）．ここで A_N は (9.1) で定義されているから $x = a_m$ $(m \geqq N)$ となる m が存在するので，(2) が成り立つ.

十分性： 実数 α が (1), (2) をみたしているとする．正の数 ε を任意にとると (1) から「$m \geqq N$ ならば $0 \leqq a_m^+ - \alpha < \varepsilon/2$」となる番号 N が存在する．この N に対して $n \geqq N$ をみたす番号 n を任意にとる．$a_n^+ = \sup A_n$ だから，注意 7.7 から $a_n - \varepsilon < a_m$ $(m \geqq n)$ をみたす番号 m が存在するので，

$$a_n^+ - \frac{\varepsilon}{2} < a_m \leqq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{すなわち} \qquad a_n^+ - \alpha < \varepsilon$$

を得る．一方，この n に対して (2) から $\alpha - \varepsilon < a_m$ $(m \geqq n)$ となる番号 m が存在する．ここで $a_m \in A_n$ だから $a_m \leqq a_n^+ = \sup A_n$．したがって

$$\alpha - \varepsilon < a_m \leqq a_n^+ \qquad \text{すなわち} \qquad \alpha - a_n^+ < \varepsilon$$

となるので，$|a_n^+ - \alpha| < \varepsilon$．正数 ε は任意，$n \geqq N$ も任意だったから，$a_n^+ \to \alpha$. □

補題 9.5. 数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は，その上極限と下極限が一致することで，そのとき，極限値は上下極限の値と一致する.

証明. 数列 $\{a_n\}$ の上極限を α，極限を β として，$\beta = \alpha$ を示す．正数 ε に対して，番号 N を「$n \geqq N$ ならば $a_n \leqq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$，$|a_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$」となるようにとる．このとき，

$$-\frac{\varepsilon}{2} < a_n - \beta \leqq \alpha - \beta + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{だから} \qquad -\varepsilon < \alpha - \beta.$$

また，この ε, N に対して $\alpha-\frac{\varepsilon}{2}<a_m$ となる $m\geqq N$ が存在するので，

$$\alpha-\beta-\frac{\varepsilon}{2}<a_m-\beta<\frac{\varepsilon}{2}\qquad\text{だから}\qquad \alpha-\beta<\varepsilon.$$

したがって $|\alpha-\beta|<\varepsilon$ が任意の正の数 ε に対して成り立つ．とくに $\varepsilon=1/m$ (m は正の整数) として $m\to\infty$ とすれば $\alpha=\beta$ が得られる．同様に下極限も β と一致する．

逆に上極限と下極限が一致したとして，その値を α とすると，補題 9.4 の (1) とそれを下極限に書き換えたものを用いれば，任意の $\varepsilon>0$ に対して，次をみたす番号 N の存在がわかる：「任意の番号 $n\geqq N$ に対して $a_n\leqq\alpha+\frac{\varepsilon}{2}$, $\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\leqq a_n$ が成り立つ」．この N に対して $n\geqq N$ なら $|a_n-\alpha|\leqq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ となるので $\{a_n\}$ は α に収束する．□

命題 9.6. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha>0,\qquad \limsup_{n\to\infty}b_n=\beta$$

をみたしているならば，

$$\limsup_{n\to\infty}(a_nb_n)=\alpha\beta.$$

証明． 数列 $\{a_nb_n\}$ に対して $\alpha\beta$ が補題 9.4 の二つの条件 (1), (2) をみたすことを示す．

(1): 与えられた正の数 ε に対して，$\varepsilon'=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2(\alpha+|\beta|)},\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right\}$ とおく．このとき，

- $a_n\to\alpha$ であることから,「$n\geqq N_1$ ならば $|a_n-\alpha|<\varepsilon'$」をみたす番号 N_1 が存在する．
- $\beta=\limsup\limits_{n\to\infty}$ だから，補題 9.4 の (1) から「$n\geqq N_2$ ならば $b_n<\beta+\varepsilon'$」をみたす番号 N_2 が存在する．

そこで $N=\max\{N_1,N_2\}$ とすれば $n\geqq N$ なる n に対して

$$a_nb_n<(\alpha+\varepsilon')(\beta+\varepsilon')=\alpha\beta+(\alpha+\beta)\varepsilon'+\varepsilon'^2\leqq\alpha\beta+(\alpha+|\beta|)\varepsilon'+\varepsilon'^2\leqq\alpha\beta+\varepsilon.$$

(2): 与えられた正の数 ε に対して $\varepsilon''=\min\left\{\frac{\varepsilon}{4\alpha},\frac{\varepsilon}{2|\beta|},\alpha\right\}$ とおくと,「$n\geqq N_3$ ならば $|a_n-\alpha|<\varepsilon''$」をみたす番号 N_3 が存在する．いま，番号 N を任意にとると，補題 9.4 の (2) から，$m\geqq\max\{N,N_3\}$ をみたす番号 m で $\beta-\varepsilon''<b_m$ となるものが存在する．このとき $\alpha\beta-\varepsilon<a_mb_m$ を示せば良い．実際，$\alpha>0$ に注意すれば

$$\begin{aligned}a_mb_m-\alpha\beta+\varepsilon&\geqq a_m(\beta-\varepsilon'')-\alpha\beta+\varepsilon\geqq(a_m-\alpha)\beta-a_m\varepsilon''+\varepsilon\\&\geqq-|a_m-\alpha|\,|\beta|-(\alpha+\varepsilon'')\varepsilon''+\varepsilon''\geqq-\varepsilon''|\beta|-2\alpha\varepsilon''+\varepsilon>0.\end{aligned}$$

□

9.2 コーシーの収束条件

上極限，下極限を用いて，実数の連続性のもう一つの表現を与える：

定義 9.7. 数列 $\{p_n\}$ が**コーシー列**[2] であるとは，任意の正の数 ε に対して，次をみたす番号 N が存在することである：

$$m,\ n\geqq N \text{ をみたす任意の番号 } m,\ n \text{ に対して } |p_m-p_n|<\varepsilon.$$

補題 9.8. 収束する数列はコーシー列である．

証明． 数列 $\{p_n\}$ が p に収束すると仮定する．このとき，任意の正の数 ε をとれば,「$n\geqq N$ ならば $|p_n-p|<\frac{\varepsilon}{2}$」となる番号 N をとることができる．この N に対して m, $n\geqq N$ に対して

$$|p_m-p_n|=|(p_m-p)-(p_n-p)|\leqq|p_m-p|+|p_n-p|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

となるので，$\{p_n\}$ はコーシー列である．□

補題 9.9. コーシー列は上・下に有界である．

証明． コーシー列 $\{p_n\}$ をとると（定義 9.7 で $\varepsilon=1$ として）「m, $n\geqq N$ ならば $|p_m-p_n|<1$」となる番号 N が存在する．とくに $m=N$ として「$n\geqq N$ ならば $|p_n-p_N|<1$」が成り立つ．したがって，任意の k に対して

$$|p_k|\leqq M\qquad (M=\max\{|p_0|,|p_1|,\dots,|p_{N-1}|,|p_N|+1\})$$

が成り立つ．□

定理 9.10 (コーシーの収束条件)**.** コーシー列は収束する．

注意 9.11. 定理 9.10 は実数の連続性の一つの表現である．実際，すべての項が有理数となるコーシー列で，無理数に収束するものが存在する（問題 9-2）．

定理 9.10 の証明． 数列 $\{p_n\}$ がコーシー列ならば，補題 9.9 より有界なので，上極限・下極限が存在する．そこで

$$\alpha_-:=\liminf_{n\to\infty}p_n,\qquad \alpha_+:=\limsup_{n\to\infty}p_n$$

[2] コーシー列：a Cauchy sequence.

とおく．コーシー列の定義から，任意の正の整数 k に対して「$m,\ n \geqq N_1$ ならば $|p_m - p_n| < 1/(3k)$」をみたす番号 N_1 が存在する．

また，α_+ が上極限であることから，補題 9.4 から，「$n \geqq N_2$ なら $p_n < \alpha_+ + 1/(3k)$」が成り立つような番号 N_2 が存在し，さらに「$m \geqq N_2$ かつ $\alpha_+ - 1/(3k) < p_m$」となる m が存在する．

同様に，α_- が下極限であることから，「$n \geqq N_3$ なら $p_n > \alpha_- - 1/(3k)$」が成り立つような番号 N_3 が存在し，さらに「$m' \geqq N_3$ かつ $\alpha_- + 1/(3k) > p_{m'}$」となる m' が存在する．

そこで $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ とおくと，$m,\ m' \geqq N$ をみたす番号 $m,\ m'$ で

$$\alpha_+ - \frac{1}{3k} < p_m < \alpha_+ + \frac{1}{3k}, \qquad \alpha_- - \frac{1}{3k} < p_{m'} < \alpha_- + \frac{1}{3k}$$

をみたすものが存在する．ここで $|p_m - p_{m'}| < 1/(3k)$ に注意すれば

$$|\alpha_+ - \alpha_-| < \frac{1}{k}$$

が得られるが，k は任意なので $k \to \infty$ とすることで $\alpha_+ = \alpha_-$ を得る．このことと補題 9.5 から $\{p_n\}$ は収束する．□

系 9.12. 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は，任意の正の数 ε に対して，次のような番号 N が存在することである：

$$n \geqq N \text{ なる任意の番号 } n \text{ と任意の正の整数 } m \text{ に対して} \quad \left|\sum_{k=n}^{n+m} a_k\right| < \varepsilon.$$

証明． これは部分和 (8.2) からなる数列がコーシー列となることと同値である．□

9.3 絶対収束

定義 9.13. 級数の各項に絶対値をつけることによって得られる級数を与えられた級数の**絶対値級数**とよぼう：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{の絶対値級数は} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \qquad \text{である．}$$

級数の絶対値級数が収束するとき，もとの級数は**絶対収束**する[3]という．

[3] 絶対収束：absolute convergence; 絶対収束する：to converge absolutely. 絶対収束性の定義にはもとの級数が収束することは含まれていないが定理 9.14 から，絶対収束性は収束性を導く．

定理 9.14. 絶対収束する級数は収束する．

証明． 級数 $\sum |a_n|$ が収束するならば，系 9.12 から，次をみたす番号 N が存在する：

$$n \geqq N \quad \text{ならば，任意の正の整数 } m \text{ に対して} \quad \sum_{k=n}^{n+m} |a_k| < \varepsilon.$$

この N に対して $n \geqq N$ とすると，

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} a_k\right| \leqq \sum_{k=n}^{n+m} |a_k| < \varepsilon.$$

であるから，系 9.12 から $\sum a_n$ も収束する．□

注意 9.15. 級数 $\sum a_n$ が絶対収束するならば，

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

が成り立つが，右辺の和がわかったとしても左辺の値がわかるとは限らない．

系 9.16. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が，ある番号 N 以降の項に対して

$$|a_n| \leqq b_n \qquad (n \geqq N)$$

をみたしているとする．このとき，級数 $\sum b_n$ が収束するならば級数 $\sum a_n$ は絶対収束する．とくに，この級数は収束する．

証明． 級数 $\sum |a_n|$ は正項級数だから，命題 8.6 より結論が得られる[4]．□

例 9.17. 数列 $\{a_n\}$ のある番号 N 以降の項が $|a_n| \leqq cr^n$（c，r は正の定数で $0 < r < 1$）ならば，級数 $\sum a_n$ は絶対収束する（例 8.5 参照）．◇

例 9.18. 数列 $\{a_n\}$ のある番号 N 以降の項が $|a_n| \leqq cn^p$（$c > 0$，$p < -1$）ならば，級数 $\sum a_n$ は絶対収束する（例 8.8 参照）．◇

上極限を用いて正項級数の収束判定条件を与えよう．これは，第 10 回の冪級数の収束半径の議論で重要となる：

[4] 命題 8.6 では，すべての項の大小関係が仮定されているが，最初の有限の項を変更しても級数が収束するという性質は不変なので，系 9.16 のような仮定で十分である．

定理 9.19. 数列 $\{a_n\}$ に対して $\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ とおくと

(1) $\alpha < 1$ なら級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束する．

(2) $\alpha > 1$ なら級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する．

証明． まず $0 \leqq \alpha < 1$ として，二つの正の数

$$\varepsilon := \frac{1-\alpha}{2} > 0, \qquad r := \frac{1+\alpha}{2} < 1$$

をとると，上極限の条件（補題 9.4 (1)）から「$n \geqq N$ ならば $\sqrt[n]{|a_n|} \leqq \alpha + \varepsilon = r$」となる N が存在する．このとき $|a_n| \leqq r^n$ だから，例 9.17 により $\sum a_n$ は絶対収束．

一方，$\alpha > 1$ の場合は，$\varepsilon = (\alpha - 1)/2 > 0$, $r = (1+\alpha)/2 > 1$ とする．このとき，任意の正の整数 N に対して $n \geqq N$ かつ $\sqrt[n]{|a_n|} > \alpha - \varepsilon = r$ となる番号 n が存在する．このとき $|a_n| > r > 1$ だから，a_n は 0 に収束しない（例 6.15 参照）．したがって，定理 8.2 から $\sum a_n$ は発散する． □

注意 9.20. 定理 9.19 で $\alpha = 1$ の場合は判定できない．実際，例 8.8 の級数はすべて $\alpha = 1$ となるが，収束する場合も発散する場合もある．

級数のすべての項が 0 でないときは問題 9-3 のような収束判定条件もある．

9.4 条件収束

収束する級数が絶対収束していないとき，その級数は**条件収束**する[5)]という．

例 9.21. 例 8.10 の級数の収束は条件収束である． ◇

注意 9.22. 絶対収束する級数の和は，だいたい有限の和と同じように扱ってよい．一方，条件収束する級数は複雑な挙動を示す．たとえば

- 絶対収束する級数は，その項を任意に入れかえても同じ和に収束する．
- 条件収束する級数は，項の順番をうまく入れ替えることによって，任意の値に収束させることができる．

証明は難しくないが，ここでは深入りしない．

5) 条件収束：conditional convergence; 条件収束する：to converge conditionally.

問 題 9

9-1 補題 9.1 に対応する $\{a_n^-\}$ の性質を書きなさい．

9-2 すべての項が有理数となるコーシー列で，無理数に収束するものを挙げなさい．

9-3 数列 $\{a_n\}$ のすべての項が 0 ではなく，極限値

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

が存在するとき，

- $\alpha < 1$ のとき級数 $\sum a_n$ は絶対収束する．
- $\alpha > 1$ のとき級数 $\sum a_n$ は発散する．

$r = 1$ の場合はどうか．

9-4 次の級数は $|r| < 1$ のとき絶対収束，$|r| > 1$ のとき発散する．そのことを確かめなさい：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^p r^n$. ただし p は任意の実数．

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} r^n$. ただし α は任意の実数．

さらに $r = 1$, $r = -1$ の場合はどうなるか．

10. 冪級数

与えられた数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ と文字 x に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \tag{10.1}$$

の形の級数を x に関する**冪級数**（べき）という[1]．級数 (10.1) がある範囲 I の x の値に対して収束するならば，これは I 上で定義された関数を表す：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad x \in I = \{x \in \mathbb{R} \mid (10.1) \text{ は収束 }\}. \tag{10.2}$$

第 4 回のテイラー級数は，与えられた関数を冪級数で表すことができる例である．とくに $|x|$ が小さいとき，(10.2) の f は右辺の最初の数項で近似される．

テイラー級数 (4.8) のように $f(a+h)$ を h の冪級数で表すことができれば，f の a の近くの挙動を調べられる．とくに $x=a+h$ とおけば，(4.8) は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

の形に書ける．この式の右辺のような形を a **を中心とする冪級数**ということがある．ここでは，0 を中心とする冪級数 (10.1) を扱うことにする．

10.1 収束半径

命題 10.1. 冪級数 (10.1) が $x=r$ に対して収束するならば，$|x|<|r|$ をみたす任意の x に対して (10.1) は**絶対収束**する．

証明． 定理 8.2 から $a_n r^n$ は 0 に収束するので，番号 N で「$n \geqq N$ ならば $|a_n r^n| < 1$」となるものが存在する．すると，$n \geqq N$ なる n に対して

$$|a_n x^n| = |a_n r^n| \left|\frac{x^n}{r^n}\right| \leqq \rho^n \qquad \left(\rho := \left|\frac{x}{r}\right| < 1\right)$$

なので，例 9.17 から $\sum a_n x^n$ は絶対収束する． □

[*] 2013 年 12 月 10 日
[1] 冪級数：a power series,「巾級数」は嘘字．

ここで，(10.1) に対して

$$r := \sup C, \qquad C := \big\{|x| \,\big|\, \text{級数 } (10.1) \text{ は収束する}\big\} \tag{10.3}$$

とおくと，$r \geqq 0$ または $r=+\infty$ となる．この r を冪級数 (10.1) の**収束半径**という[2]．

命題 10.2. 冪級数 (10.1) の収束半径が r であるための必要十分条件は，次が成立することである：

(i) $|x|<r$ ならば (10.1) は絶対収束する．

(ii) $|x|>r$ ならば (10.1) は発散する．

とくに $r=+\infty$ であることと，任意の実数 x に対して (10.1) が絶対収束することは同値である．また $r=0$ であることと任意の $x \neq 0$ に対して (10.1) が発散することは同値である．

証明．必要性： 式 (10.3) のように r, C をとるとき，

(i)：$|x|<r$ のとき，$\frac{1}{2}(r-|x|) = \varepsilon > 0$ とおくと，上限の性質（注意 7.7 の (2)）から $r-\varepsilon < s$ をみたす $s \in C$ が存在する．とくに s で (10.1) は収束するが，$|x| = r-2\varepsilon < s$ なので命題 10.1 から (10.1) は絶対収束する．

(ii)：$|x|>r$ をみたす x で (10.1) が収束するならば，命題 10.1 から $(|x|+r)/2$ $(>r)$ でも収束するが，これは r の定義に反する．

十分性： 実数 r が (i), (ii) をみたすとき，(ii) から r は C の上界となる．さらに (i) から r より小さい数は C の上界でない．したがって $r=\sup C$． □

冪級数の収束半径は次のように求められる：

定理 10.3（コーシー・アダマールの定理[3]）**.** 冪級数 (10.1) の収束半径 r は

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}$$

で与えられる．

証明． 各 n に対して $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|}$ なので

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{r}$$

なので，定理 9.19 から（$\alpha = |x|/r$ として）結論が得られる． □

[2] 収束半径：the radius of convergence.
[3] Cauchy, Augustin Louis, 1789–1857; Hadamard, Jacques Salomon, 1865–1963.

定理 10.4 (ダランベールの定理[4])．冪級数 (10.1) に対して，極限値

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = r$$

が存在するならば r が収束半径である．

証明． 問題 9-3 を用いれば定理 10.3 と同様．□

注意 10.5. コーシー・アダマールの定理 10.3 は任意の冪級数の収束半径を与える公式だが，ダランベールの定理では収束半径が求まらないことがある．実際，$a_n = 0$ となる n が無限個ある級数に対して定理 10.4 は適用できない．

例 10.6. (1) 冪級数 $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ の収束半径は $+\infty$ である．実際，ダランベールの定理 10.4 を用いれば，収束半径は $(1/n!)/(1/(n+1)!) = n+1 \to \infty$ となることがわかる．

(2) 冪級数 $1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ の収束半径は 0 である．

(3) 多項式 $p(t)$ に対して，冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$ の収束半径は 1 である．

(4) 多項式 $p(t)$, $q(t)$ に対して冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p(n)}{q(n)}x^n$ の収束半径は 1 である．ただし $q(n)$ は負でない整数の根をもたないものとする．◇

例 10.7. 冪級数

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2m+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{10.4}$$

$$\left(a_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^m}{n} & (n = 2m+1; m \text{ は負でない整数}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}\right)$$

の収束半径を求めよう．

[4] d'Alembert, Jean Le Rond; 1717–1783.

無限個の a_n が 0 になるので，ダランベールの定理 10.4 は直接使えないので，コーシー・アダマールの定理 10.3 を使う：

$$b_n^+ := \sup\{\sqrt[k]{|a_k|}\mid k \geqq n\} = \sup\left\{\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\,\middle|\, k \geqq n, k \text{ は奇数}\right\}$$

とすると，補題 5.22 から

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} b_n^+ = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

となるので，収束半径は 1 である．

ダランベールの定理を用いて次のように収束半径を求めることもできる：s に関する冪級数

$$1 - \frac{1}{3}s + \frac{1}{5}s^2 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m s^m}{2m+1}$$

の収束半径は定理 10.4 から 1 なので，この級数は $|s| < 1$ なら絶対収束，$|s| > 1$ なら発散．いまこの級数の s を x^2 で置き換え，x をかければ，(10.4) が得られるので，これは $|x| < 1$ で絶対収束，$|x| > 1$ で発散する．すなわち収束半径は 1 となる（命題 10.2）．◇

収束半径が r の冪級数 (10.1) の $x = \pm r$ での挙動にはさまざまな場合がある．

例 10.8. (1) 冪級数 $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ の収束半径は 1 であり，$x = \pm 1$ で発散する．

(2) 冪級数 $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$ の収束半径は 1 であり $|x| < 1$ で絶対収束し，$|x| > 1$ では発散する．さらに $x = 1$ で $\log 2$ に収束（条件収束）する（例 4.3）が，$x = -1$ では発散する（例 8.8）．

(3) 例 10.7 の級数の収束半径は 1 で，$x = \pm 1$ では $\dfrac{\pi}{4}$ に条件収束する（問題 3-5，例 10.14）．

(4) 冪級数 $1 + x + \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^3}{3^2} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ の収束半径は 1 であり，$x = \pm 1$ で絶対収束する（例 8.8）．◇

10.2　冪級数が定める関数

命題 10.1 から冪級数 (10.1) が収束する範囲 I は区間となり，(10.2) は区間 I 上の関数 f を定める．とくに，冪級数の部分和から定まる関数 f_n を用いて f を次のように表しておく：

$$(10.5)\qquad f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\qquad (x\in I);\qquad f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k.$$

補題 10.9. 式 (10.5) の状況で，冪級数の収束半径 r が正であるとする．このとき区間 $(-r,r)$ に含まれる任意の閉区間 J に対して次が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty}\sup_J|f_n-f|=0.$$

証明． 閉区間 $J=[a,b]\subset(-r,r)$ に対して，$\delta:=\frac{1}{2}\min\{r-b,a-r\}>0$ とすると，$J\subset[-r+2\delta,r-2\delta]$ となる．関数の J での上限は J' での上限を超えないから，$J=[-r+2\delta,r-2\delta]$ で結論を示せばよい．あたえられた級数は $x=r-\delta$ で絶対収束するから，$|a_n(r-\delta)^n|\to 0$ $(n\to\infty)$．したがって,「$n\geqq N$ ならば $|a_n(r-\delta)^n|\leqq 1$」となる番号 N がとれる．このとき，$n\geqq N$ ならば，各 $x\in J$ に対して

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)|&=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k\right|\leqq\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_kx^k|=\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k(r-\delta)^k|\left|\frac{x}{r-\delta}\right|^k\\&\leqq\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{x}{r-\delta}\right|^k\leqq\frac{\rho^{n+1}}{1-\rho}\qquad\left(\rho:=\frac{|x|}{r-\delta}<1\right)\end{aligned}$$

となる．したがって $\sup_J|f_n-f|\to 0$ $(n\to\infty)$.　□

定理 10.10. 収束半径 r が正である冪級数が (10.2) で定める関数 f は，区間 $(-r,r)$ で連続である．

証明． 点 $\alpha\in(-r,r)$ をひとつ固定して，$\lim_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)$ を示せばよい．まず $d:=\frac{1}{2}\min\{r-\alpha,\alpha+r\}>0$ とすると，α は $(-r+d,r-d)$ に含まれている．いま，閉区間 $J:=[-r+d,r-d]$ を固定しておく．

正の数 ε を任意にとると，補題 10.9 より，次をみたす番号 N が存在する：

$$n\geqq N\qquad ならば\qquad |f_n(x)-f(x)|\leqq\sup_J|f_n-f|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad(x\in J).$$

この N に対して部分和 f_N は多項式だから連続関数（例 6.10）．したがって，次をみたす正の数 δ が存在する：

$$|x-\alpha|<\delta\qquad ならば\qquad |f_N(x)-f_N(\alpha)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

この δ に対して $|x-\alpha|<\delta$ なら

$$\begin{aligned}|f(x)-f(\alpha)|&=|f(x)-f_N(x)+f_N(x)-f_N(\alpha)+f_N(\alpha)-f(\alpha)|\\&\leqq|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(\alpha)|+|f_N(\alpha)-f(\alpha)|<\varepsilon\end{aligned}$$

したがって f は α で連続である（注意 6.8）．　□

例 10.8 の (2), (3), (4) のように，収束半径 r の冪級数が $(-r,r)$ の端点で収束する場合もあるが，定理 10.10 は端点での連続性について言及していない．実際，ここでの証明では $\alpha=\pm r$ の場合には有効でない．しかし，端点で冪級数が収束するならば，冪級数が定める関数の連続性が言える：

定理 10.11 (アーベルの連続性定理[5])**.** 冪級数 (10.2) の収束半径が r で，$x=r$ $(x=-r)$ で (10.2) が収束するならば，次が成り立つ：

$$\lim_{x\to r-0}f(x)=f(r)\quad\left(\lim_{x\to -r+0}f(x)=f(-r)\right),\qquad ただし\ f(x):=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

証明は第 11 回に与える．

10.3　項別微分・積分

定理 10.10 から，冪級数 (10.5) で定まる関数 f は $(-r,r)$ で連続なので，積分可能[6]である．

定理 10.12 (項別積分[7])**.** 収束半径が r (>0) の冪級数で (10.2) のように定義される関数 f と任意の x $(-r<x<r)$ に対して次が成り立つ：

$$\int_0^x f(t)\,dt=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n.$$

[5] Abel, Niels Henrik; 1802–1829.

[6] 前期に扱った（証明してはいないが）一変数関数の積分の項目を思い出そう．連続関数の積分可能性の証明は第 11 回の講義ノートで与える．

証明. 式 (10.5) のように部分和 f_n をとると，補題 10.9 から

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x f_n(t)\,dt\right| &= \left|\int_0^x \big(f(t)-f_n(t)\big)\,dt\right| \leqq \left|\int_0^x \big|f(t)-f_n(t)\big|\,dt\right| \\ &\leqq \left|\int_0^x \sup_{[-x,x]}\big|f(t)-f_n(t)\big|\,dt\right| \leqq \sup_{[-x,x]}\big|f(t)-f_n(t)\big|\,|x| \to 0 \qquad (n\to\infty)\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$f_n(x)$ は x の多項式だから，積分公式が使えて

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k-1}}{k}x^k = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n. \qquad \square$$

定理 10.13 (項別微分)**.** 収束半径が r (>0) の冪級数で (10.5) のように定義される関数 f は $(-r,r)$ で微分可能で，次が成り立つ：

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \quad (-r<x<r). \tag{10.6}$$

証明. 命題 9.6 と補題 5.22 から

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

なので，コーシー・アダマールの定理 10.3 から (10.6) の右辺の級数の収束半径は r である．そこで，この級数で与えられる関数を g とおくと，定理 10.12 から $x\in(-r,r)$ に対して

$$\int_0^x g(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = f(x)$$

なので，微分積分学の基本定理より f は微分可能で $f'(x)=g(x)$ $(-r<x<r)$. $\square$

例 10.14. 級数

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} \tag{10.7}$$

の和を求めよう（問題 3-5 の別解を与える）．まず定理 8.9 から (10.7) は収束することがわかる．

[7] 項別積分（微分）: integration (differentiation) by term and term.

いま，例 10.7 の (10.4) のような冪級数を考えると，その収束半径は 1 である．したがって定理 10.13 から

$$f(x) = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1<x<1)$$

は区間 $(-1,1)$ で微分可能で

$$f'(x) = 1-x^2+x^4-x^6+\cdots = \frac{1}{1+x^2} \qquad (-1<x<1).$$

したがって

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1}x \qquad (-1<x<1)$$

であるが，$x=1$ で級数 (10.4) は収束するのでアーベルの定理 10.11 から

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_{x=1} = \lim_{x\to1-0}\tan^{-1}x = \frac{\pi}{4} \qquad \diamondsuit$$

問　題　10

10-1　例 10.6 を確かめなさい．

10-2　例 10.8 を確かめなさい．

10-3　例 10.14 に倣って，級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^n}$$

の和を求めなさい（例 3.11 の別解）．

10-4　例 10.14 に倣って，級数

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1\frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{9}(\sqrt{3}\pi+3\log 2)$$

であることを示しなさい（例 8.10 (3)）．

11. テイラーの定理と極値問題

11.1 前回の補足

アーベルの定理の証明 第 10 回で挙げたアーベルの連続性定理 10.11 に証明を与えよう．変数 x の冪級数の収束半径が r (>0) ならば $x=rt$ と置き換えれば収束半径 1 の冪級数が得られるので，最初から収束半径 r は 1 としておいてよい．また，与えられた収束半径 1 の冪級数が $x=-1=-r$ で収束するならば，$x=-u$ と置き換えれば $u=1$ で収束する冪級数が得られるので，次の定理を証明すればよいことになる：

定理 11.1. 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が 1 で，さらに $x=1$ とおいた級数が収束するならば，

$$\lim_{x\to r-0} f(x) = X \qquad \text{ただし } f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad X := \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

証明． 数列 $\{a_n\}$ の部分和数列を

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

とおく．すると仮定より $\{\sigma_n\}$ は収束するので，有界である（補題 5.5 の (1)）．したがって，$\{\sigma_n - X\}$ も有界だから

$$|\sigma_n - X| \leqq A \qquad (n=0,1,2,\dots) \tag{11.1}$$

をみたす正の数 A が存在する．

正の数 ε が与えられたとする．このとき，$\{\sigma_n\}$ は X に収束するから，番号 M で次を満たすものをとることができる：

$$n \geqq M \qquad \text{ならば} \qquad |\sigma_n - X| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{11.2}$$

[*] 2014 年 1 月 14 日

また，式 (11.1) の A と (11.2) の M に対して

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4(M+1)A} \tag{11.3}$$

とおいておく．

いま，(11.2) の M に対して $N > M+2$ なる番号 N をとると，$a_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$ $(n \geqq 1)$ だから，$0<x<1$ をみたす x に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n x^n &= \sigma_0 + \sum_{n=1}^{N} (\sigma_n - \sigma_{n-1}) x^n = \sigma_0 + \sum_{n=1}^{N} \sigma_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \sigma_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n (x^n - x^{n+1}) + \sigma_N x^N = (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n x^n + \sigma_N x^N \\
&= (1-x) \left(\sum_{n=0}^{N-1} (\sigma_n - X) x^n + \sum_{n=0}^{N-1} X x^n \right) + \sigma_N x^N \\
&= (1-x) \left(\sum_{n=0}^{M} (\sigma_n - X) x^n + \sum_{n=M+1}^{N-1} (\sigma_n - X) x^n \right) \\
&\qquad + (1-x) X \sum_{n=0}^{N-1} x^n + \sigma_N x^N \\
&= (1-x) \left(\sum_{n=0}^{M} (\sigma_n - X) x^n + \sum_{n=M+1}^{N-1} (\sigma_n - X) x^n \right) \\
&\qquad + X(1-x) \sum_{n=0}^{N-1} x^n + \sigma_N x^N \\
&= (1-x) \left(\sum_{n=0}^{M} (\sigma_n - X) x^n + \sum_{n=M+1}^{N-1} (\sigma_n - X) x^n \right) \\
&\qquad + X(1-x) \frac{1-x^N}{1-x} + \sigma_N x^N \\
&= (1-x) \left(\sum_{n=0}^{M} (\sigma_n - X) x^n + \sum_{n=M+1}^{N-1} (\sigma_n - X) x^n \right) \\
&\qquad + X + (\sigma_N - X) x^N.
\end{aligned}$$

したがって，$0<x<1$ ならば，(11.1), (11.2), (11.3) を用いて

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=0}^{N} a_n x^n - X\right| \\
&\leqq (1-x)\left(\sum_{n=0}^{M} |\sigma_n - X| x^n + \sum_{n=M+1}^{N-1} |\sigma_n - X| x^n\right) + |\sigma_N - X| x^N \\
&< (1-x)A\sum_{n=0}^{M} x^n + (1-x)\sum_{n=M+1}^{N-1} \frac{\varepsilon}{4} x^n + \frac{\varepsilon}{4} x^N \\
&\leqq (1-x)A(M+1) + (1-x)\frac{\varepsilon}{4} x^{M+1}\frac{1-x^{N-M-1}}{1-x} + \frac{\varepsilon}{4} \\
&\leqq (1-x)\frac{\varepsilon}{4\delta} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}
$$

とくに，$N \to \infty$ とすると左辺は $|f(x) - X|$ に収束するので,

$$
|f(x) - X| \leqq \frac{\varepsilon}{4}\left(2 + \frac{1-x}{\delta}\right) \qquad (0 < x < 1)
$$

が成り立つ．したがって $0 < 1 - x < \delta$ をみたす任意の x に対して

$$
|f(x) - X| \leqq \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon
$$

が得られた．ここで $\varepsilon > 0$ は任意だったから,

$$
\lim_{x \to 1-0} f(x) = X
$$

である． □

11.2　一変数関数の極値

一変数関数の最大値・最小値は第 2 回の定理 2.1 で扱ったがここで定義の形で意味を明確にしておく：

定義 11.2. 一変数関数 f が a で**最大値** (**最小値**) [1] をとるとは，定義域内のすべての x に対して $f(x) \leqq f(a)$ $(f(x) \geqq f(a))$ が成り立つことである．

例 11.3.
- 関数 $f(x) = x^4$ が $x = 0$ で最小値をとる．

[1] 最大値：the maximum；最小値：the minimum.

- 実数全体で定義された関数

$$
f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}
$$

は実数全体で C^∞-級で

$$
f^{(k)}(0) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)
$$

となる（第 4 回の例 4.5 参照）．この関数は $x = 0$ で最小値をとる．◇

定義 11.4. 一変数関数 f が a で**極大値** (**極小値**) [2]をとるとは，次を満たす正の実数 ε が存在することである：f の定義域に含まれ，かつ $0 < |x - a| < \varepsilon$ を満たす任意の x に対して，$f(x) < f(a)$ $(f(x) > f(a))$ が成り立つことである．

定義 11.4 は “a に十分近い x に対して $f(x) < f(a)$ $(f(x) > f(a))$ が成り立つ” ということを定量的に述べたものである．

例 11.5.
- 関数 $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で極小値（実は最小値）をとる．
- 関数 $f(x) = x^3 - 3x$ は $x = -1$ で極大値，$x = 1$ で極小値をとる．◇

極値の判定条件

定理 11.6. 関数 f は $x = a$ を含む開区間で C^∞-級とする[3]．

A. $f(x)$ が $x = a$ で極値（極大値または極小値）をとるならば，$f'(a) = 0$ である．

B. (**A** の対偶) $f'(a) \neq 0$ ならば，$f(x)$ は $x = a$ で極大値も極小値もとらない．

C. $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ $(f''(a) < 0)$ が成り立つならば $f(x)$ は $x = a$ で極小値（極大値）をとる．

[2] 極大値：a maximal; a local maxima; 極小値：a minimal; a local minima: 極値：an extremal.

[3] 記述を煩雑にしないために強い仮定をおいた．実際 **A**, **B** は f が a で微分可能であれば成り立つ．また，**C** は f が 2 回微分可能であれば成り立つ．

例 11.7. $f(x)=x^3-3x$ の極値を調べよう．$f'(x)=3(x-1)(x+1)$ だから $f'(x)=0$ が成り立つための必要十分条件は $x=1$ または $x=-1$ である．したがって定理 11.6 **B** より 1, -1 以外の点では f は極値をとらない．さらに $f''(x)=6x$ だから，$f''(1)>0$, $f''(-1)<0$．したがって定理 11.6 **C** から $f(x)$ は $x=1$ で極小値 -2, $x=-1$ で極大値 2 をとる． ♢

注意 11.8.
- 定理 11.6 の **A** の逆は成立しない．実際 $f(x)=x^3$ が反例である．
- 定理 11.6 の **C** の逆は成立しない．実際，例 11.5 が反例になっている．

定理 11.6 の B が成り立つ理由（いい加減バージョン）： $m=f'(a)$ とおいて，$m>0$ の場合を考える．このとき，テイラーの定理 3.1 より，$m=f'(a)$ に注意して

$$(*) \qquad f(a+h)=f(a)+mh+R_2(h) \qquad \text{とおけば} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{R_2(h)}{h}=0$$

となる．この $R_2(h)$ は h が十分小さければ mh よりもずっと小さいので，十分小さい h の範囲では無視してよい．したがって

$$f(a+h)-f(a)\fallingdotseq mh \qquad (h \text{ が十分 } 0 \text{ に近いとき})$$

である[4]が，$m>0$ だから，この式の右辺は $h>0$ のとき正，$h<0$ のとき負になる．したがって，h が十分小さいときは

$$f(a+h)>f(a) \quad \bigl(h>0 \text{ のとき}\bigr); \qquad f(a+h)<f(a) \quad \bigl(h<0 \text{ のとき}\bigr)$$

となるので，どんな小さい ε をとっても "$0<|h|<\varepsilon$ ならば $f(a+h)>f(a)$", "$0<|h|<\varepsilon$ ならば $f(a+h)<f(a)$" のいずれも成り立たせることはできない．すなわち f は $x=a$ で極値をとらない．

定理 11.6 の B が成り立つ理由（ちょっと正確バージョン）： $m>0$ のとき，$(*)$ までは同様．いま $|R_2(h)/(mh)|$ は h を 0 に近づけると 0 に近づくのだから，正の数 δ をうまくとれば

$$(**) \qquad |h|<\delta \qquad \text{ならば} \qquad \left|\frac{R_2(h)}{mh}\right|<\frac{1}{2}$$

[4] "$\fallingdotseq$" は「およそ等しい」

が成り立つようにできる．$m>0$ だから $(**)$ は

$$|h|<\delta \qquad \text{ならば} \qquad -\frac{1}{2}m|h|<R_2(h)<\frac{1}{2}m|h|$$

と書き換えられる．したがって $(*)$ より

$$|h|<\delta \qquad \text{ならば} \qquad mh-\frac{1}{2}m|h|<f(a+h)-f(a)<mh+\frac{1}{2}m|h|$$

となる．ここで，$0<h<\delta$ ならば，$|h|=h$ だから，

$$f(a+h)-f(a)>mh-\frac{1}{2}mh=\frac{1}{2}mh>0,$$

$0>h>-\delta$ なら $|h|=-h$ だから

$$f(a+h)-f(a)<mh+\frac{1}{2}m|h|=\frac{1}{2}mh<0$$

となり，どんな小さい ε をとっても $|h|<\varepsilon$ の範囲で $f(a+h)-f(a)$ は符号を変える．したがって（いいかげんバージョンと同じ）．

定理 11.6 の C が成り立つ理由（いい加減バージョン）： $m=f''(a)$ とおいて，$m>0$ の場合を考える．このとき，テイラーの定理より ($f'(a)=0, f''(a)=m$ に注意して)

$$f(a+h)=f(a)+\frac{1}{2}mh^2+R_3(h) \qquad \text{とおけば} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{R_3(h)}{h^2}=0$$

となる．この $R_3(h)$ は h が十分小さければ $\frac{1}{2}mh^2$ よりもずっと小さいので，十分小さい h の範囲では無視してよい．したがって

$$f(a+h)-f(a)\fallingdotseq\frac{1}{2}mh^2 \qquad (h \text{ が十分 } 0 \text{ に近いとき})$$

であるが，$m>0$ だから，この式の右辺は $h\neq 0$ であるかぎり常に正の値をとる．したがって，h が十分小さいときは

$$f(a+h)>f(a)$$

となるので，$f(x)$ は $x=a$ で極小値をとる．$m<0$ の場合も同様である．

問　題　11

11-1 (1) 関数 $f(x) = x^4$ が $x = 0$ で最小値をとることを証明しなさい（例 11.3）.

(2) C^∞-級関数 f の $x = a$ における (1 次，2 次 ...) 微分係数を用いて f が $x = a$ で最大値・最小値，極大値・極小値をとるかどうかを判定するような必要十分条件はあり得ない．そのことの理由を述べなさい（例 11.3 を参照せよ）.

(3) 関数 $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で極小値をとる（実は最小値をとる）ことを示しなさい（例 11.5）.

11-2 関数 $f(x) = x^4 - 2x^2$ のグラフを描き，どこで極値 (極大値・極小値) をとるかを指摘しなさい．それらの点で f は最大値・最小値をとるか.

11-3 (1) 定理 11.6 の **A** (**B**) の逆は成立しないことを確かめなさい（注意 11.8）

(2) 定理 11.6 の **C** の逆は成立しないことを確かめなさい（注意 11.8）.

11-4 関数 $f(x) = x^4 + px^3 + qx^2$ (p, q は定数) の極値を調べなさい.（ヒント：3 次方程式 $f'(x) = 0$ が一つの実数解しか持たない場合，3 つの異なる実数解を持つ場合，1 組の重根とそれ以外の一つの解を持つ場合，3 重根を持つ場合に分けて考える）

11-5 定理 11.6 の **B** が成り立つ理由の「いい加減バージョン」の $m < 0$ の場合を完成させなさい.

11-6 定理 11.6 の **B** が成り立つ理由の「ちょっと正確バージョン」を完成させなさい.

11-7 定理 11.6 の **C** が成り立つ理由の「ちょっと正確バージョン」をつくりなさい.

11-8 定理 11.6 の状況で $f'(a) = 0,\ f''(a) = 0$ のときはなにが起きているか.

12. テイラーの定理と極値問題

12.1　2 変数関数の極大値・極小値

前期に学んだ多変数関数，とくに 2 変数関数の極値問題を考えたい．まず，記号・用語の復習からはじめよう：

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と書き，

$$\mathbb{R}^2 := \{(x,y) \,|\, x,\, y \text{ は実数 } \} = \{(x,y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\} = \text{「座標平面」}.$$

とする．点 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ と正の数 ε に対して

$$U_\varepsilon(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2\}$$

を点 (a,b) の ε-近傍[1]という．$\mathbb{R}^2$ の部分集合 U が**開集合**であるとは，任意の $(a,b) \in A$ に対してうまく正の数 ε を選べば $U_\varepsilon(a,b) \subset A$ とできることである．また $\mathbb{R}^2$ の部分集合 U が**連結**[2]であるとは，任意の 2 点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in A$ を U 内の連続曲線で結ぶことができることである．これらの概念を用いて，$\mathbb{R}^2$ の連結な開集合のことを **領域**[3]という．これらの用語は前期「微分積分学第一」の第 3 回講義ノートを参照.

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 f が $(a,b) \in D$ で**極大値** (**極小値**) をとるとは，うまく正の数 ε をとれば，任意の $(x,y) \in U_\varepsilon(a,b)$ $((x,y) \neq (a,b))$ に対して $f(x,y) < f(a,b)$ $(f(x,y) > f(a,b))$ が成り立つことである.

ここでは，1 変数関数に対する極値判定条件（定理 11.6）に相当するような 2 変数関数（多変数関数）極値判定条件を与える.

[*] 2014 年 1 月 21 日

[1] ε-近傍：an ε-neighborhood；開集合：an open set.

[2] 連結：connected; ここで述べた定義は正確には弧状連結性 pathwise connectedness を表しているが，$\mathbb{R}^n$ の部分集合に対しては連結性と弧状連結性は同値である.

[3] 領域：a domain.

12.2　2 変数関数のテイラーの定理

1 変数関数に関する定理 11.6 は，考えている点の近くでの関数の挙動をテイラーの定理（定理 2.9, 3.1）の 2 次の項までで近似することにより得られた．2 変数関数についても同様のことを考える：

定理 12.1 (2 変数関数のテイラーの定理)**.** 2 変数関数 f が $(x,y) = (a,b)$ を含む領域で C^∞-級であるとする．このとき

$$(12.1)\quad \begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right) + R_3(h,k) \end{aligned}$$

と書くと

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R_3(h,k)}{h^2+k^2} = 0$$

が成り立つ.

証明. あたえられた (a,b) および (h,k) に対して，1 変数関数 $F(t) = f(a+th, b+tk)$ を考えると，F は $[0,1]$ で C^∞-級であるから，F にテイラーの定理 2.9 を適用すると，

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \frac{1}{3!}F'''(\theta) \qquad (0 < \theta < 1)$$

となるような θ が存在する．ここで，合成関数の微分公式（チェイン・ルール[4]）を用いれば，$F(0) = f(a+0h, b+0k) = f(a,b)$,

$$\begin{aligned} F'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k \\ F''(0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2 \\ F'''(\theta) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}h^2k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}k^3 \end{aligned}$$

を得る．ただし，最後の式の右辺の偏微分は $(a+\theta h, b+\theta k)$ での値である．とくに f は C^∞-級なので，f の任意の階数の偏導関数は連続である．したがって，例えば

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a+\theta h, b+\theta k) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)$$

[4] チェイン・ルール：the chain rule, テキスト，第 1 章 3.2, 前期の講義ノート第 6 回を参照.

が成り立つ．したがって $(h,k)=(r\cos t, r\sin t)$ $(r>0)$ とおけば $(h,k)\to(0,0)$ すなわち $r\to 0$ のとき

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a+\theta h, b+\theta k)\frac{h^3}{h^2+k^2}\right)=\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a+\theta h, b+\theta k)r\cos^3 t\right)\to 0$$

が成り立つ．$F'''(\theta)$ の他の項も同様に考えれば $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} F'''(\theta)/(h^2+k^2)=0$ を得る． □

注意 12.2. 定理 12.1 は 2 次式による f の近似とみなすことができる．とくに，(12.1) の h, k に関する 1 次の項までをとれば，1 次式による近似

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k+R_2(h,k), \tag{12.2}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R_2(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

が成り立つことがわかる．

注意 12.3. テイラーの公式 (12.1) の右辺のうち，h, k の 1 次の項は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=df(a,b)\boldsymbol{h} \qquad \left(\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}\right)$$

と表される．ただし $df(a,b)=\big(f_x(a,b), f_y(a,b)\big)$ は (a,b) における f の **全微分**[5)]である．さらに h, k の 2 次の項の 2 倍は,

$$(h,k)\begin{pmatrix}f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b)\\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}={}^t\boldsymbol{h}\,\mathrm{Hess}\,f(a,b)\boldsymbol{h}, \tag{12.3}$$

$$\mathrm{Hess}\,f(a,b):=\begin{pmatrix}f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b)\\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}$$

と表される．ただし ${}^t\boldsymbol{h}$ は列ベクトル $\boldsymbol{h}$ を転置して得られる行ベクトルを表す．ここで，偏微分の順序交換定理[6)]から，$\mathrm{Hess}\,f(a,b)$ は 2 次の**対称行列**[7)]となる．この行列を f の (a,b) における**ヘッセ行列**[8)]とよぶ.

[5)]全微分：the total differential，前期の講義ノート第 5 回参照
[6)]偏微分の順序交換：前期の講義ノート第 3 回参照.
[7)]対称行列：a symmetric matrix.
[8)]ヘッセ行列：the Hessian matrix; Hesse, Ludwig Otto, 1811–1874, de.

12.3　2 変数関数の極値判定

定理 12.4. $\mathbb{R}^2$ の領域 D で定義された C^∞-級関数 f が $(a,b)\in D$ で極値をとるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

が成り立つ.

証明. 関数 f が (a,b) で極小値をとるならば, 次をみたす正の数 ε が存在する：$h^2+k^2<\varepsilon^2$ ならば $f(a+h,b+k)>f(a,b)$．とくに $|h|<\varepsilon$ のとき $f(a+h,b)>f(a,b)$ なので $F(h):=f(a+h,b)$ は $h=0$ で極小値をとる．したがって定理 11.6 から $F'(0)=f_x(a,b)$ は 0 である．同様に $G(k)=f(a,b+k)$ を考えれば $f_y(a,b)=0$ が成り立つ. □

定理 12.5. $\mathbb{R}^2$ の領域 D で定義された C^∞-級関数 f が $(a,b)\in D$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

をみたしているとする．このとき,

$$\Delta:=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right)^2=\det\mathrm{Hess}\,f(a,b),$$
$$A:=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$$

とおくと,

- $\Delta>0$ かつ $A>0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で極小値をとる.
- $\Delta>0$ かつ $A<0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で極大値をとる.
- $\Delta<0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で極値をとらない.

これを示すために次の補題を用いる：

補題 12.6. h と k の斉次 2 次式

$$\varphi(h,k):=Ah^2+2Bhk+Ck^2 \qquad (A,\ B,\ C\ \text{は定数}) \tag{**}$$

に対して

- 任意の $(h,k) \neq (0,0)$ に対して $\varphi(h,k) > 0$ となるための必要十分条件は $A > 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ である．
- 任意の $(h,k) \neq (0,0)$ に対して $\varphi(h,k) < 0$ となるための必要十分条件は $A < 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ である．
- φ が正の値も負の値もいずれもとるための必要十分条件は $AC-B^2 < 0$ となることである．
- それ以外（$AC - B^2 = 0$）の場合は，φ は符号を変えないが，$\varphi = 0$ となるような $(h,k) \neq (0,0)$ が存在する．

証明． 2 次式の平方完成

$$\varphi(h,k) = \begin{cases} A\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 + \frac{AC-B^2}{A} & (A \neq 0) \\ C\left(k + \frac{B}{C}h\right)^2 + \frac{AC-B^2}{C} & (C \neq 0) \\ 2Bhk & (A = C = 0) \end{cases}$$

からわかる． □

定理 12.5 の証明（いい加減バージョン）． 定理 12.1 と仮定から

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}\varphi(h,k) + R_3(h,k), \qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R_3(h,k)}{h^2+k^2} = 0$$

が成り立つ．ただし $A := f_{xx}(a,b)$, $B := f_{xy}(a,b)$, $C := f_{yy}(a,b)$ に対して

$$\varphi(h,k) := Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$$

とおいた．h^2+k^2 が十分小さいときは $|R_3(h,k)|$ は $|\varphi(h,k)|$ に比べて小さいので $f(a+h,b+k) - f(h,k)$ は $\frac{1}{2}\varphi(h,k)$ で近似されるので，補題 12.6 から結論が得られる． □

12.4 三変数以上の場合

一般に $\mathbb{R}^n$ の領域 D で定義された C^∞-級関数 f をベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,\dots,x_n)$ に実数 $f(\boldsymbol{x})$ を対応させているとみなしておく．このとき，$\boldsymbol{a} = {}^t(a_1,\dots,a_n) \in D$ におけるテイラーの定理は，

(12.4)
$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + df(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + {}^t\boldsymbol{h}\,\mathrm{Hess}\,f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + R_3(\boldsymbol{h}), \qquad \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{R_3(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|^2} = 0.$$

とかける．ただし

$$df(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right),$$

$$\mathrm{Hess}\,f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}.$$

このとき，

事実 12.7.
- f が $\boldsymbol{a}$ で極値をとるならば $df(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ である．
- $df(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ かつ $\mathrm{Hess}\,f(\boldsymbol{a})$ の固有値がすべて正 (負) ならば f は $\boldsymbol{a}$ で極小値（極大値）をとる．
- $df(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ かつ $\mathrm{Hess}\,f(\boldsymbol{a})$ の固有値が符号を変えるならば f は $\boldsymbol{a}$ で極値をとらない．

この事実の後半の 2 つは，次に述べる 2 次形式の性質からわかる：

実数の変数 $(x_1,\dots,x_n)$ の斉次 2 次式を (n 変数の) **2 次形式**という．2 次形式は

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

の形で表される．とくに $x_ix_j = x_jx_i$ であるから，a_{ij} と a_{ji} が等しくなるように係数を按分することができる．すなわち 2 次形式の一般形は

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \qquad (a_{ij} = a_{ji}).$$

これを，列ベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,\dots,x_n)$ と対称行列 $A = (a_{ij})$ を用いて

(12.5)
$$\varphi(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \qquad (A \text{ は実対称行列})$$

と表すことができる．行列 A を 2 次形式 φ の**表現行列**という．

事実 12.8 (線形代数の復習).

- 実数を成分とする対称行列の固有値は実数である.
- 実数を成分とする対称行列 A は直交行列により対角化できる.

すなわち，実数を成分とする対称行列 A に対して，直交行列 P が存在して

$$
{}^tPAP = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \qquad ({}^tPP = E = \text{単位行列})
$$

とできる．ただし $\mu_1, \dots, \mu_n$ は A の固有値である．このことを用い，変数変換

$$
\boldsymbol{X} = {}^t(X_1, \dots, X_n) := {}^tP\boldsymbol{x}
$$

を行うと，2 次形式 (12.5) は

$$
\varphi = \mu_1 X_1^2 + \dots + \mu_n X_N^2
$$

と書くことができる．とくに

- $\mu_1, \dots, \mu_n$ がすべて正ならば，$\varphi(\boldsymbol{x}) > 0$ が任意の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して成立する．このとき 2 次形式 (12.5) は**正値**または**正定値**という.
- $\mu_1, \dots, \mu_n$ がすべて負ならば，$\varphi(\boldsymbol{x}) < 0$ が任意の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して成立する．このとき 2 次形式 (12.5) は**負値**または**負定値**という.
- $\mu_1, \dots, \mu_n$ の中に正のものも負のものも含まれているならば，$\varphi(\boldsymbol{x})$ は正，負いずれの値もとる.

問　題　12

12-1　次の集合は $\mathbb{R}^2$ の領域か.

$$
\mathbb{R}^2, \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqq 0\},
$$
$$
\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1\}, \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}
$$

12-2　補題 12.6 の証明を完成させなさい.

12-3　$f(x,y) = x^3 - xy + y^3$ に対して

- $f_x(x,y) = 0$, $f_y(x,y) = 0$ となる (x,y) をすべて求めなさい.（ここで虚数解は考えない．なぜか）
- 上で求めた (x,y) に対して定理 12.5 を適用することにより，次のことを確かめなさい：「$f(x,y)$ は $(x,y) = (1/3, 1/3)$ で極小値 $-1/27$ をとり，それ以外の点では極値をとらない.」

12-4　関数 $f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$ の極値を調べなさい．ただし a, b は正の定数である（テキスト 74 ページ問題 10）.

12-5　関数 $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - x^3 + y^3$ の極値を調べなさい.

12-6　$\mathbb{R}^2$ の領域 D で定義された調和関数[9] f の 2 次偏導関数 f_{xx} が D 上で 0 にならなければ f は D 上で極値をとらない.

[9] 前期の講義ノート第 2 回，演習問題 2-5 参照.

13. 常微分方程式

一般論　ここでは，未知関数 $\boldsymbol{x} = \bigl(x_1(t), \dots, x_n(t)\bigr)$ に関する常微分方程式の初期値問題

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\bigl(t, \boldsymbol{x}(t)\bigr), \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{a} \qquad \left(\cdot = \frac{d}{dt}\right) \tag{13.1}$$

を考える．ここで $\boldsymbol{f}$ は $\mathbb{R}^n$ に値をもつ $(n+1)$-変数の関数である．成分を用いて $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n)$ と書けば，微分方程式 (13.1) は

$$\dot{x}_j(t) = f_j\bigl(t; x_1(t), \dots, x)_n(t)\bigr), \qquad x_j(t_0) = a_j \qquad (j = 1, \dots, n)$$

と連立微分方程式の形で表すことができる．ただし $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$ である．

定理 13.1 (基本定理)**.** 実数 t_0 を含む開区間 I と，点 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ を含む $\mathbb{R}^n$ の領域上 D に対して，

$$I \times D := \{(t, \boldsymbol{x}) \,|\, t \in I, \boldsymbol{x} \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

で定義された，$\mathbb{R}^n$ に値をとる関数 $\boldsymbol{f}\colon I \times D \to \mathbb{R}^n$ が $I \times D$ 上で C^1-級であるとする[1]．このとき，t_0 を含む開区間 I 上で定義された C^1-級関数 $\boldsymbol{x}\colon I \to \mathbb{R}^n$ で (13.1) を満たすものが**ただひとつ**存在する．

例 13.2. 定数 λ に対して，常微分方程式

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t), \qquad x(0) = a \tag{13.2}$$

を考える．関数 $x(t) := ae^{\lambda t}$ は (13.2) を満たすから，定理 13.1 より (13.2) の解はこの形のものに限る．　$\diamondsuit$

注意 13.3.

- $\boldsymbol{f}$ の微分可能性はもう少し弱めることができるが，実用上はここであげたもので十分である．しかし「連続」まで弱めることはできない．実際，単独の微分方程式 $\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}$ ($\boldsymbol{f}$ が微分可能でないケース) の初期条件 $x(0) = 0$ を満たす解は無数に存在する．実際，任意の $a > 0$ に対して
$$x(t) = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ \frac{1}{27}t^3 & (x \geqq a) \end{cases}$$
は条件を満たす．
- $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ が任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して定義されている (t を陽に含まない場合を含む) としても方程式 (13.1) の解は $\mathbb{R}$ 全体で定義されるとは限らない．実際，$\dot{x} = 1 + x^2$, $x(0) = 0$ の解は $x(t) = \tan t$ であるが，この定義域は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ である．

*)2014 年 1 月 28 日

1) C^n-級なら結論として得られる関数も C^n-級である．

線形微分方程式　区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義された n 次正方行列に値を持つ関数 $A\colon I \to \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n$ に値を持つ関数 $\boldsymbol{b}\colon I \to \mathbb{R}^n$ に対して，微分方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t) \tag{13.3}$$

を**線形常微分方程式**という．ただし $t_0 \in I$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ は実数を成分にもつ $n \times n$ 行列全体の集合を表している．

成分を用いて

$$\begin{aligned} A(t) &:= \bigl(a_{ij}(t)\bigr), \\ \boldsymbol{b}(t) &:= {}^t\bigl(b_1(t), \dots, b_n(t)\bigr), \\ \boldsymbol{x}(t) &:= {}^t\bigl(x_1(t), \dots, x_n(t)\bigr) \end{aligned}$$

と表せば，(13.3) は

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{aligned} \right. \tag{13.4}$$

と表される．

定理 13.4 (線形常微分方程式の基本定理)**.** 行列値関数 $A\colon I \to \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$, $\boldsymbol{b}\colon I \to \mathbb{R}^n$ がともに C^∞-級であるとする．このとき $t_0 \in I$ を一つ固定すると，任意の $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\underline{I\ \text{上で定義された}}$ C^∞-級関数 $\boldsymbol{x}\colon I \to \mathbb{R}^n$ で (13.3) と初期条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{a}$ を満たすものがただひとつ存在する．

例 13.5. 区間 I 上で定義された C^∞-級関数 $\alpha(t)$ と $\varphi(t)$ に対して，微分方程式

$$\dot{x}(t) + \alpha(t)x(t) = \varphi(t)$$

を考える．この方程式の解は

$$x(t) = \left(c + \int_0^t \frac{\varphi(s)}{x_0(s)}\,dt\right) x_0(t), \qquad x_0(t) = \exp\left(-\int_0^t \alpha(s)\,ds\right)$$

と表される．ただし $c = x(0)$ は定数である． ♢

例 13.6. 定数 α, γ に対して，微分方程式

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \alpha x = 0 \tag{13.5}$$

を考える．これは，定理 13.1, 13.4 の形をしていないが，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -2\gamma \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

とかけるので，定理 13.4 の意味で線形常微分方程式であることがわかる．とくに係数行列 $A(t)$ は t によらない定数だから，この方程式の解は $\mathbb{R}$ 全体で定義される．

ここでは，とくに $\gamma = 0$ の場合を考える：

- $\gamma = 0, \alpha = \omega^2 > 0$ のとき，(13.5) を満たす x は

  $$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

  とかける．ただし A, B は定数である．

- $\gamma = 0, \alpha = -\omega^2 < 0$ のとき，(13.5) を満たす x は

  $$x(t) = A\cosh\omega t + B\sinh\omega t$$

  とかける．ただし A, B は定数である．

一般の場合は次のような解が得られる：2 次方程式

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \alpha = 0 \tag{13.6}$$

の 2 つの根を λ_1, λ_2 とする．

- λ_1, λ_2 が相異なる実数ならば，(13.5) を満たす x は

  $$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

  の形に表される．ただし A, B は定数．
- $\lambda_1 = -\gamma + i\omega, \lambda_2 = -\gamma - i\omega$ (ω は実数) とかけている場合，(13.5) を満たす x は

  $$x(t) = e^{-\gamma t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

  の形に表される．ただし A, B は定数．
- $\lambda_1 = \lambda_2$ (実数) の場合，(13.5) を満たす x は

  $$x(t) = e^{\lambda_1 t}(A + Bt)$$

  の形に表される．ただし A, B は定数． ♢

線形微分方程式の解の空間　方程式 (13.3) の $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合を**同次方程式** あるいは **斉次方程式**という：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t). \tag{13.7}$$

もし，ベクトル値関数 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t)$ が (13.7) の解ならば，それらの**線形結合**

$$a\boldsymbol{x}_1(t) + b\boldsymbol{x}_2(t) \qquad (a,\ b\ \text{は定数})$$

もまた (13.7) の解である．

定理 13.7. $\mathbb{R}^n$ に値をとる未知関数 $\boldsymbol{x}(t)$ に関する方程式 (13.7) の解全体の集合は n 次元線形空間 (ベクトル空間) となる.

証明. すぐ上に述べたように，解全体の集合は線形結合に関して閉じているのでベクトル空間となる．次元が n であることは，初期値問題の解の一意性から従う（問題 13-1 参照）. □

いま，方程式 (13.7) の解全体のなす線形空間を V_A とかく．すなわち $\boldsymbol{x} \in V_A$ とは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ が (13.7) を満たすことである.

定理 13.8. 線形微分方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

の解 $\boldsymbol{x}_0(t)$ をひとつとると，この方程式の任意の解は

$$\boldsymbol{x}_0(t) + \boldsymbol{x}(t) \qquad \boldsymbol{x} \in V_A$$

の形に表すことができる.

例 13.9. 正の定数 ω, m $(\omega = m)$ に対して，微分方程式

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \sin mt \tag{13.8}$$

の解は

$$\frac{1}{\omega^2 - m^2}\sin mt + A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

の形にかける．ただし A, B は定数である. ♢

問　題　13

13-1 微分方程式 (13.7) を考える．ただし $A(t)$ は t_0 を含む開区間 I で C^∞-級であるとする.

(1) $\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t)$ が (13.7) の解であれば，$a\boldsymbol{x}_1(t) + b\boldsymbol{x}_2(t)$ もまた (13.7) の解であることを確かめなさい．ただし a, b は実数の定数である.

(2) $\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t)$ が (13.7) の解であるとき，$\boldsymbol{x}_1(t_0)$, $\boldsymbol{x}_2(t_0)$ が一次独立ならば，$\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t)$ は一次独立，すなわち

$$a\boldsymbol{x}_1(t) + b\boldsymbol{x}_2(t) = 0 \quad \text{がすべての } t \text{ に対して成り立つならば} \quad a = b = 0$$

であることを確かめなさい.

(3) 方程式 (13.7) の解全体の集合は n 次元線形空間になることを示しなさい.（ヒント：$\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ に対して $\boldsymbol{x}_j(t)$ を，初期条件 $\boldsymbol{x}_j(t_0) = \boldsymbol{e}_j$ となる (13.7) の解とすると，$\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$ は (13.7) の解全体の集合の基底である.

13-2 定理 13.8 を示しなさい.（ヒント：一つの解 $\boldsymbol{x}_0$ を固定すると，任意の解 $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ は斉次方程式 (13.7) の解である.）

13-3 正の定数 k に対して，線形微分方程式の初期値問題

$$\ddot{x}(t) = k^2 x(t) \qquad x(0) = A, \qquad \dot{x}(0) = B \tag{$*$}$$

を考える.

(1) 関数

$$x(t) = A\cosh kt + \frac{B}{k}\sinh kt$$

は $(*)$ を満たすことを確かめなさい.

(2) 方程式 $\ddot{x} = k^2 x$ の解をすべてあげなさい.

13-4 例 13.6 の各々の場合について，解がそこに挙げられている形に限ることを確かめなさい.

13-5 $m = \omega$ のとき (13.8) の解はどうなるか.

13-6 正の定数 k, α に対して，微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = kx(\alpha - x)$$

を**ロジスティック方程式**という[2]．この方程式の初期条件 $x(0) = m$ を満たす解は，$m \neq 0$ のとき

$$x(t) = \frac{\alpha}{1 + \sigma e^{-k\alpha t}} \qquad \left(\sigma = \frac{\alpha}{m} - 1\right),$$

$m = 0$ のときは $x(t) = 0$ である．このことを確かめなさい．また，解が定義される t の区間を求め，区間の端での x の挙動を調べなさい．

[2] ロジスティック方程式：the logistic equation.