

2013 年 10 月 21 日 (2013 年 10 月 28 日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 2

お知らせ

- 前回配布した授業日程に誤りがありました。10月29日(火曜日)に授業が入っていましたが、これは誤りです。この日は通常通り火曜日の授業です。さらに、1月16日(木曜日)は月曜日時間割の日となりますので、この日に授業があります。申し訳ありません。今回、修正版を配布します。
- 指定の用紙で提出されなかった方がいらっしゃいます。この用紙の扱いですが、
 - まず問題番号毎に分類し、答案を採点する。
 - 裏面の希望などの項に記述があるものだけを取り出し、コメントをつけて、講義資料に掲載する。
 - 裏面の質問・誤りの指摘の部分を分類、採点し、講義資料に掲載する。
 - 学籍番号順にソートし、得点を所定のファイルに入力する。
 - 用紙をドキュメント・スキャナにかけて、学籍番号.pdf という名前の pdf ファイルをつくる。

異なる用紙のサイズ、所定の場所に学籍番号・氏名が書いてない、両面を2枚(クリップどめなど)などの提出物は、上の各々のステップで特別扱いが必要となり、山田は時間を失います。

所定の形式で提出されない方は、山田の時間を失うことよりも自分が特別扱いされることが重要というメッセージとみなし、原則的として無視することとします。

前回の補足

- 問 1.3 の 連結・コンパクトは今年度の「集合と位相第一」では扱っていないようです。「集合と位相第二」で扱いますが、当面は気にしなくてよいです。既知と仮定して、言葉の復習をする意図でした。
- 記号の使い方が“フリーダム”な答案がいくつか。数学の記号は、万国共通・万古不易ではなく、文脈によって異なります。例えば、ここでは“単位行列を I と書く”と説明しました。高校で習ったから、線型代数の授業でそうだったから、 E と書くのは、文脈に沿っていません(空気を読んでいません)。文脈に沿った記号を用いて下さい。
- 答案で「題意」という語を使った方が複数ありました。以下の理由によりチェックを入れています：山田は「題意」という語の意味を知りません。辞書を引くと「題の意味」(新明解国語辞典)「題の意味するところ」(広辞苑)とあり、答案の文脈での意味とは無関係に思えます。数学の答案で「題意」が使われる場合の多くは「仮定」または「結論」で置き換えることができます(両方の用例を見ます)。仮定の意でも、結論の意でも使う語を数学の文脈で使うのは無責任ではないでしょうか。答案で「題意」と書きたいと思ったら、それを「仮定」「結論」のうち適切な方で置き換えてください。どうしても「題意」を使いたい方は山田に「題意」の意味を(出典も含めて)教えて下さい。

前回までの訂正

講義資料 2, 1 ページの最初のパラグラフ：直交行列 ⇒ [内積](#)

授業に関する御意見

- この課題の締め切りをもう少しだけのばしてほしいです/ 問題の提出(原文ママ：答案のことか)を1日位のばしてほしい。
山田のコメント：別の科目が火曜日の午後に提出物の受付を始めるので、申し訳ありませんが、ご希望には沿いかねます。
- 問題の解答、解説を次回に配っていただけると非常にありがたいです/ 次の週に前の週の問題の解説を配ってほしいです/ 課題の間に対して略解、参考などをのちの授業で頂けるとうれしいです。/ 次回に今回の問題のヒントを配布してほしいです。
山田のコメント：いまのところ予定していません。第1回講義(と課題の問題文)で十分にヒントおよび解答になっていると思いますが、まだ不足? クラスメイトと相談するのが一番だと思います。

- 月曜授業終了後バイト、火曜日午前も授業が詰まっているので、レポートの締め切りをどうか水曜にしてください!!
山田のコメント： 山田も授業と会議が詰まっているので、だめです。
- 重要点や試験に出す可能性のある問題を指摘してほしいです。 山田のコメント： 全部重要。試験が重要なのではない。
- 部分点は積極的につけてください。 山田のコメント： 嫌
- 新しい考え方のところに時間をつかってもらいたい。
山田のコメント： 抽象的なご希望ですが、例えば具体的に第 1 回の講義のどのあたりですか?
- 講義内で例を多く扱ってくださると非常に助かります。 山田のコメント： もちろん、嫌というほど出てきます。
- 幾何学は苦手な分野なので、あまり行間を省かないで授業して頂けるとありがたいです。
山田のコメント： あまり行間を省かないと、本質が見えない(木が見えても森が見えない)ので、適切に省きます。
- とても楽しい授業でした! ガウス・ボンネの定理はすごく美しい定理だと思っているので、とても楽しみにしています!
山田のコメント： 美しいだけではないんです。
- 今のところなし。 山田のコメント： me, too.

質問と回答

質問： 今回のレポートの 1-3 の問題で ${}^t x {}^t A A y = {}^t x y$ から A は直交行列であるとしましたが、その証明をどうすれば良いかをおしえてほしいです。

お答え： 補題： A を n 次正方行列とする。任意のベクトル $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して ${}^t x {}^t A A y = {}^t x y$ が成り立つならば、 A は直交行列である。証明： $e_1 = {}^t(1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = {}^t(0, 0, \dots, 1)$, すなわち $\{e_1, \dots, e_n\}$ は \mathbb{R}^n の標準基底とすると、 ${}^t e_i e_j = \delta_{ij}$ (右辺はクロネッカーの δ)。ここで、補題の仮定は任意の x, y に対して成り立つから ${}^t e_i {}^t A A e_j = {}^t e_i e_j = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, n$)。いま、 $B := {}^t A A = (b_{ij})$ とすると、上の式の左辺は b_{ij} になるから、 $b_{ij} = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, n$)。したがって $B = {}^t A A = I$ となり A は直交行列である。

質問： 1 変数関数の“滑らかさ”の定義は $f(x)$ が(ある区間 I で)微分可能で、その区間で $f'(x)$ が連続であることである(小平『解析入門 I』)。微分可能であることが滑らかであるための必要十分条件になっているので、授業の「滑らかさと微分可能性は独立である」という説明は(少なくとも 1 変数関数では)あやまりと思われそうです。(この場合 $y = \sqrt[3]{x}$ は $x = 0$ を含む区間では滑らかではないことになります。)

お答え： 「関数の滑らかさ」についてはおっしゃる通りです。しかし、今回述べたのは「曲線の滑らかさ」です。関数 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ は $x = 0$ を含む区間でおっしゃる通りに滑らかではありません。しかし、そのグラフ $y = \sqrt[3]{x}$ は曲線として滑らかなのです。講義で述べた「曲線の滑らかさ」は、滑らかでない関数のグラフでも曲線として滑らかな場合があるように定めました。なお、関数(対応関係)と関数のグラフ(図形)は区別して考えて下さい。

質問： 「 $y = \sqrt[3]{x}$ のグラフを見ながら首を 90° 回したら $y = x^3$ に見える」とおっしゃっていましたが、右回りでも左回りでも $y = -x^3$ のグラフにしか見えないと思います。お答え：おっしゃる通りで、向きを反転する変換 $(x, y) \mapsto (y, x)$ (直線 $y = x$ に関する折り返し)で曲線 $y = \sqrt[3]{x}$ と $y = x^3$ が重ね合わされます。

質問： 「曲線がなめらかである」ことを C^∞ -級を用いて論じていましたが、無限回微分する必要があるのはなぜでしょうか。曲率は 2 階微分なので、 C^2 -級でも十分ではないかと思うのですが。

お答え： おっしゃる通り、平面曲線の曲率は C^2 -級であれば定義でき、フルネの公式も、曲線論の基本定理も成立します。しかし、もっと高次の微分可能性があれば、例えば、テキスト 25 ページ、問題 7 のような近似公式が成り立ちます。また、§5 の空間曲線は、換率が定義されるために C^3 -級が必要です。場合によって要求される微分可能性が違うので、いちいち階数の仮定を記述せず、ざっくり“ C^∞ -級”とした方が見通しがよいのでそうしました。

質問： 微分可能 $\Rightarrow C^\infty$ 級ではないと思いました。たとえば

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases} \quad \text{のとき } f(x) \text{ は微分可能であるが, } f'(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ -2x & (x < 0) \end{cases} \quad \text{は微分可能では}$$

ないので、この $f(x)$ は微分可能であるが C^∞ ではない。

お答え： それはそうです。講義で述べたのは、「この講義では、簡単のため“微分可能”といったら“ C^∞ -級”のこととする」というローカルな言葉の使い方の宣言です。このような言葉の使い方は比較的一般的です。

質問： 曲線がその上の点 P でなめらかであることをざっくり定義しましたが、厳密な定義はこの講義では行おうでしょうか。お答え：いいえ。講義で扱う“正則にパラメータづけられた C^∞ -曲線”が“滑らかな曲線”と思って下さい。

質問： 板書で $O(n) = \{\det = 1\} \cup \{\det = -1\}$ という記述がありましたが、これは誤解をまねく表現だと思いました。(口頭による注意も無かったような...) お答え：Thanks. “ $O(n)$ は determinant が 1 のものと determinant

- が -1 のものに分かれる”といいながら書いたつもりですが、これでは誤解しますか？ とくに $\{\det = 1\}$ の下に $SO(n)$ と書いているはずで、これと講義資料の問 1.2 をあわせると誤解はないようにも思いますが、いかが？
- 質問： 陰関数定理のところに関して、ある曲線がなめらかであるかどうかを陰関数定理によってどう評価しているのがよくわかりませんでした。“曲線が P でなめらか $\Leftrightarrow P$ の近くで C^∞ -級のグラフと合同”と陰関数定理はどう関係しているのでしょうか。 お答え：第 2 回で説明する。注：“ C^∞ -級のグラフ”でなく“ C^∞ -級関数のグラフ”。
- 質問： 陰関数定理の説明をもう少し詳しくやってほしい。 お答え：今回の講義資料の内容でどこの部分が不足ですか？
- 質問： 今回の講義の最後の方で陰関数定理が出てきました。陰関数定理は 2 年前期の解析学概論で出てきたのですが、その時も何を意味しているのがよくわかりませんでした。結局、陰関数定理とはどういうことなのですか？
- お答え：“結局”でどういう説明を求めていますか？ どういうことか、とは“ステートメントに書かれていること”です。虚心坦懐に読みましょう。幾何学ではいくつかの場面で陰関数定理を用います。今回がその一つですが、3 年次に“多様体”を習うとまた現れます。ステートメント・使い方の例を何度も読んで考えればいつのまにかわかってくるはずで、それでも一言で述べよ、というなら「曲がったものをまっすぐにできる、という定理」です。
- 質問： 問題 1-1 に表記されている $SO(2)$ の意味がよくわかりません。また $O(2)$ は \mathbb{R}^2 の合同変換という意味で合っていますか？ お答え：講義資料 1, 2 ページの問 1.2。
- 質問： 行列の英語表記が matrices になっていた（確か実行列のところだったと記憶）
- お答え： 行列 matrix の複数形は matrices . index \rightarrow indices と同じですので、間違っていないです。
- 質問： e. g. と ex. はほぼ同じ意味だと思うのですが、使いわけの基準などはあるのでしょうか？
- お答え： 手元の辞書 (Merriam-Webster) には “e. g.” は “for example” と載っていますが、“ex” に “for example” の意はのっていません。“ex” の意味に “for example の略語” とある英語の辞書があるのでしたら教えて下さい。
- 質問： 曲線の定義は次回ですか？ お答え：曲線という語のちゃんとした定義はしません（不都合はとくにないはず）。
- 質問： 本日の授業は、大部分が線形代数などの復習だったため、質問はありません。忘れていた所を復習してみます。
- お答え： ここにあるような質問はクリアしているわけですね。
- 質問： 質問ではないですが、原論の話がおもしろかったです。これからよろしくお願いします。 お答え：こちらこそ。
- 質問： 半年お世話になります。よろしく願いいたします。さて、講義を受けていて恥ずかしながら一年生の内容に不安を感じる部分が見受けられました。よろしければ復習をする上でオススメの参考書などありましたら教えていただきたいです。 お答え：すくなくとも授業で使った教科書は手元に置いてほしい。
- 質問： 定義や定理の証明などはやったが、具体的な例を多く見せてほしい。
- お答え： 今回は、いままでの復習だったので、具体的な例は以前にいろいろやっているはず。陰関数定理の使い方はひょっとしたら新しいかも知れませんが、問題 1-4 にかかなり具体的な例の考え方を具体的に書いています。
- 質問： 向きを保つ合同変換の“向きを保つ”の意味がよくわかりません。例えば（中略） x の向きがどう保たれるのか。
- お答え： 個々の点（ベクトル）の向きが保たれるという意味ではなく、“ \mathbb{R}^n の向きが保たれる”のです。一般に有限次元実ベクトル空間に“向き”の概念を定義するのですが、ここでは深入りせず、行列式が $+1$ の直交行列 A によって与えられる変換 $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax + b \in \mathbb{R}^n$ を“向きを保つ合同変換”とよぶ、というようにまとめて一単語と思うことにしたのです。現段階では「向き・を・保つ・合同変換」というようには分解しないことにしましょう。
- 質問： 今回は \mathbb{R}^n についての等長変換でしたが、本によると別の場合だと等長変換は積分の形で表示されていました。線型と微積の見事な融合ですね!! お答え：文脈は？
- 質問： 今日先生は「昔ユークリッド空間に関する試験問題を出したことがありました」と言いましたが、そういう理論的な問題はとても苦手で、だからその問題文と解答を先生に簡単に説明してほしいです。
- お答え： 講義で話したのは「ユークリッド原論について知る所を述べよ」。この問題は理論的ではないし、正解があるものでもありません。「原論」を知らないという非常識な数学科の学生をあぶりだそうという意図だったわけです。（ユークリッド空間に関する試験問題ならいつも出しています。）これは数学の授業ですので「理論的」であるのは当たり前です。「理論的であることを避けたい」というのはこの授業の全否定だと思いたすが。
- 質問： 黒板と教員用の机の間が狭いのは、ぼくが教員用の机を移動し、学生用のつけを前へ動かし後ろの席の人と会話しやすくしたためです。すみません。あの時は言えませんでした。授業内容に関する質問はありません。なお、私の家のパソコンで“べくとる”と打って変換すると「vektor」と変換されました。ドイツ語ができるパソコンみたいです。 お答え：言ってくださいよ。これを書いている変換エンジン (mozc) では「ベクトル」になります。
- 質問： 資料最後の問題の解答は公開されますか。 お答え：いいえ。

2 平面曲線の表示

関数のグラフ

- なめらかな (C^∞ -級の) 関数のグラフはなめらかな曲線である .
- 関数グラフがなめらかな曲線であってもその関数がなめらかであるとは限らない .
- 曲線のなめらかさの「定義」

陰関数表示

- 「曲線 $F(x, y) = 0$ 」という文の意味 .
- 曲線 $F(x, y) = 0$ が, 点 (x_0, y_0) のまわりでなめらかな曲線になるための十分条件 .
- 陰関数表示の特異点 .
- 関数のグラフは陰関数表示とみなせること .

パラメータ表示

- パラメータ表示 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.
- パラメータ表示の正則性と特異点 .
- 自己交叉 : パラメータ表示では特異点でない場合がある .
- パラメータ変換 .
- 関数のグラフはパラメータ表示とみなせること .
- 極座標表示された曲線 .

弧長

- 曲線の長さの定義 .
- パラメータ表示された曲線の弧長 .
- 弧長の不変性 .

問題

- 2-1 原点をひとつの焦点にもち、もうひとつの焦点が x 軸の負の部分にあるような楕円は、極座標 (r, θ) を用いて $r = \frac{a}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ と表示されることを示しなさい。ただし $\varepsilon \in [0, 1)$ は離心率、 a は正の定数である。 $\varepsilon = 1, \varepsilon > 1$ の場合にこの式は何を表すか。
- 2-2 次のような xy 平面上の曲線のパラメータ表示を求めなさい：曲線上の点 P において曲線に引いた接線と y 軸との交点を $Q = (0, t)$ とするとき線分 PQ の長さが一定 a で、かつその曲線は点 $(a, 0)$ を通る。ただし、パラメータは Q の y 座標 t を用いなさい。
- 2-3 xy 平面上の放物線 $y = x^2$ を、 x 軸上に滑らないように転がすとき、放物線の焦点はどのような曲線を描くか。
- 2-4 正の整数 m を用いて極座標表示された曲線 $r = \cos m\theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を図示し、それと同じ長さをもつ楕円を求めなさい。
- 2-5 区間 $I = [a, b]$ 上で定義された C^∞ -級関数 f のグラフを C とする： $C = \{(x, f(x)) | x \in I\}$ 。 I の任意の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ に対して

$$\mathcal{L}_\Delta := \sum_{j=1}^N d(P_{j-1}, P_j) \quad \left(P_i = (x_i, f(x_i)), i = 0, 1, 2, \dots, N \right)$$

とおく。ただし、 d は \mathbb{R}^2 のユークリッド距離を表す。このとき、

$$(*) \quad \sup\{\mathcal{L}_\Delta | \Delta \text{ は } I \text{ の分割}\} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

となることを示しなさい。(ヒント：平均値の定理，積分の定義，連続関数の積分可能性。)

いま、 $\dot{x}(t) > 0$ がつねに成り立つような、なめらかな単調増加関数 $t : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ ($t(a) = \alpha$, $t(b) = \beta$) を用いて

$$\gamma(t) := (x(t), y(t)) \quad \left(y(t) = f(x(t)), t \in [\alpha, \beta] \right)$$

と定めると、 $\gamma(t)$ は曲線 C の正則なパラメータ表示を与えている。このとき、曲線 γ の長さ $\mathcal{L}(\gamma)$ は $(*)$ の値と一致することを確かめなさい。(ヒント：置換積分法。)