2013 年 10 月 28 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 3

お知らせ

- **【重要】**大変申し訳ありませんが，すでにアナウンスした中間試験の日程を都合により変更させていただきます：

  中間試験：12 月 16 日（月曜日），3–4 時限

  授業日程表の改訂版を講義資料につけておきます．12 月 23 日（月・祝）は試験解説に充てます．

前回の補足

- 特異点という言葉の使い方について誤解を与えるような説明をしたようで，ご質問が複数きましたので，ここでまとめておきます：
  - なめらかな関数 $F(x,y)$ に対して $C := \{(x,y)\,|\,F(x,y)=0\}$ とする．すなわち C は陰関数 $F(x,y)=0$ で表示された曲線．このとき $(x_0,y_0)\in C$ が**陰関数表示** $F(x,y)=0$ **の特異点**であるとは $dF(x_0,y_0)=(0,0)$ となること．
  - 区間 I から $\mathbb{R}^2$ へのなめらかな写像 $\gamma\colon I\to\mathbb{R}^2$，すなわち曲線のパラメータ表示に対して，区間上の点 $t_0\in I$ が**パラメータ表示** $\gamma(t)$ **の特異点**であるとは $\dot\gamma(t_0)=(0,0)$ となること．

  と定義します．すなわち，ここでの特異点は図形の性質ではなく，表示の性質ということにしておきます．レムニスケートの「真ん中の点」は，陰関数表示の特異点にはなっていますが，パラメータ表示では，“異なるパラメータの値に対して同じ点が対応する点” すなわち自己交叉となっています．実際，教科書にあるパラメータ表示では，$t_1=\frac{\pi}{2}$, $t_2=\frac{3\pi}{2}$ に対して $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)=(0,0)$ となっているので，この点が自己交叉です．しかし，$\dot\gamma(t_1)\neq(0,0)$ なので，パラメータ t が t_1 の近くを動くとき，γ の像はなめらかな曲線となり，t_1 はパラメータ表示の特異点にはなっていないことがわかります．
- 星紡形（アステロイド）の綴りは astroid ではなく asteroid ではないか，というご指摘がありましたが，調べると，astroid が一般的のようです．Asteroid は小惑星表すようで，使い分けられているらしい．あさりよしとおの「アステロイド・マイナーズ」っていう漫画がありましたね（この場合は小惑星）．
- 問題 2-4: $r=\cos m\theta$ とすると $r<0$ のときもありますが，$\cos m\theta(\cos\theta,\sin\theta)$ とパラメータ表示された曲線と考えましょう．楕円は（合同なものを同一視すれば）2 つのパラメータ（長径と短径）によって決まりますから，答はただひと通りではないはずです．すべての答を求めてご覧なさい．

前回までの訂正

- 講義資料 2, 6 ページ，問題 2-1：ただし a は正の定数である． を追加
- 講義資料 2, 6 ページ，問題 2-5 の下から 5 行目：
  $t:[\alpha,\beta]\to[a,b\ (t(\alpha)=a,\ t(\beta)=b)\Rightarrow t:[a,b]\to[\alpha,\beta]\ (t(a)=\alpha,\ t(b)=\beta)$

授業に関する御意見

- 具体例が豊富で良かったとおもいます! このまま良い授業をつづけちゃって下さい!
  山田のコメント： ほんとうに良いのかなぁ．具体例は，考えたい事象のほかにもさまざまな雑音を含んでいるので，よくわかっていないとよくわからないところがあるので注意です．
- 今週は特にありません．例が多くわかりやすかったです． **山田のコメント：** そう?
- 今回の講義の陰関数定理の解説がとても分かりやすかったです．ありがとうございます．これからも分かりやすい解説をお願いします． **山田のコメント：** 分かりやすい講義は良い講義か疑問．陰関数定理の解説はきちんと自分で再現できます?
- 過去にやったところがかなりあやふやになっているので，復習がんばります． **山田のコメント：** そうしてね．
- 自分の未熟さを再認識でき，とても良い授業のように感じます． **山田のコメント：** ですか．
- 中間テストや期末テストなど今までどのような問題が出たかなどテストに関する話もしてほしい．
  山田のコメント： いや．というか，この科目を担当するのは初めて．
- 過去のレポート問題を提出した場合，採点はされますか． **山田のコメント：** 暇があれば．義務ではないと思うので．
- 今のところ満足しています! **山田のコメント：** どうも．
- 試験は基本的で平易かつ時間的余裕のある出題を希望します．
  山田のコメント： そんなの皆さんに失礼では？どーせ学生は馬鹿だからこの程度にしておけ，っていうことをやれと？
- 今の所特に無し/今のところは特になし/ こちらも特に思い浮かびません/こちらはとくにありません/ありません
  山田のコメント： me, too.

質問と回答

質問： 陰関数表示で表せるが，パラメータ表示で表せない曲線，パラメータ表示で表せるが，陰関数表示で表せない曲線は存在するのか．また，存在するなら，簡単に示せる例はあるのか．

お答え： 存在しない．実際，グラフ $y = f(x)$ （$x = g(y)$）で表される曲線は，$\gamma(t) = \bigl(t, f(t)\bigr)$ （$\bigl(g(t), t\bigr)$）のようにパラメータ表示されるし，$F(x, y) := y - f(x) = 0$ （$G(x, y) := x - g(y) = 0$) のように陰関数表示もされる．ところで，陰関数表示（パラメータ表示）された曲線の特異点でない点（正則点）の近くで曲線はグラフ表示される（今回の講義で示した）から，パラメータ表示された（陰関数表示された）とみなしてよい．

質問： 「$dF(x_0, y_0) = (0, 0) \Rightarrow C$ はなめらかな曲線」は逆は一般には成立しないということで大丈夫ですか．（円の媒介変数表示の例からも明らかな気はしますが念のため）

お答え： ここだけ取り出すとなんのことかわかりませんね．文脈を想像しますと，そうです．

質問： 特異点はその点の近くでなめらかな曲線であるかどうかの判断は実際に書いてみないとわからないのですか．

お答え： そう思って下さい．

質問： 円 $x^2 + y^2 = 1$ を $y = \sqrt{1 - x^2}$ と $y = -\sqrt{1 - x^2}$ と分けたときの点 $(1, 0)$ と $(-1, 0)$ は特異点ですか．

お答え： 考えている関数 $\pm\sqrt{1 - x^2}$ の微分可能性が崩れているので，“定義域以外の点” とみなします．

質問： $F(x, y) = x^2 - y^3$ における特異点 $(0, 0)$ と $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)$: レムニスケートにおける特異点 $(0, 0)$ の違いはどのように見分けられるのかと疑問に思いました．

お答え： 見分け方（判定条件）はこの講義の範囲を越えます．とりあえず “よく見る”．

質問： 特異点 $dF(x_0, y_0) = (0, 0)$ について，どのような性質があるのでしょうか? 極値とかならイメージできるのですが． **お答え：**さまざまなケースがある，ということを今回講義で説明した．お手軽にイメージなんかできません．

質問： 二次曲線の一番根本的な定義がよくわかりません．たとえば楕円ならば「ある 2 点からの距離の和が一定である点の集合」が先なのか，「ある 1 点からの距離とある直線からの距離の比が一定値となり，その値が 1 より小さくなる点の集合」が先かがよくわからないです．

お答え： 文脈依存．どちらを定義にしても問題ありません．前者を定義にしたら後者は楕円の性質（定理)，後者を定義にしたら前者は楕円の性質（定理)．数学用語の定義は，文脈によって異なる可能性があります．ただ，その文脈の中（本や論文や答案）で定義がゆらいではなりません．いくつかの本からカット・アンド・ペーストしてレポートをつくるときは要注意．歴史的にはどちらが先か，という問いでしたら，いずれでもなく「円錐の平面による切り口」が由緒正しいと思います．アポロニウスの「円錐曲線論」は紀元前の書物ですよね．

質問： 問題 2-1 の極座標表示が，私の知っている極座標表示 $\left(r = \frac{b^2}{a(1+\varepsilon\cos\theta)}\right)$ と異なっており，色々私自身で挑戦して見ましたが，$r = \frac{a}{1+\varepsilon\cos\theta}$ にたどりつくことができませんでした．先生のお時間と紙面に余裕がありましたら，導出方法を教えていただきたいです．私自身今一度考えてみます．

お答え： 問題をよく読んでください．この問題では a はただの定数です．（正の定数という断り書きが抜けていました．ごめんなさい．）したがって，あなたが導いた式の b^2/a をあらたに a とおき換えればおしまい．あなたが a や b という文字にどういう思い入れを持っているかは知りませんが，この問題文は，そんなことは知らないわけです．

質問： 特異点とはグラフで見るとわかりやすいですが，式の状態ではわかりません．（微分すればわかります）問題は 2-3 を選びましたが，方針はすぐわかりましたが，曲線の長さの積分が非常に難しいです．□で囲った部分（山田注：略）がわかった時，計算間違いをしてはいないと確信しました．授業は，速度が $\mathbf{0}$ でなければ「“カクッ” と曲がったりしない」という直勘的（原文ママ：直観的のことか？）説明がわかりやすかったです．

お答え： なるほど．でも質問ではないですね．

質問： 問題 2-4 の極座標表示された曲線 $r = \cos m\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ がある．この r は負になる可能性があるが，（例えば $m = 1, \theta = \pi$ のとき $r = -1$）それはどういうことですか?

お答え： θ 方向と反対の向きに $|r|$ だけ行った点を表すとみなせばよいのでしょうね．式で表せば，パラメータ θ で表示された曲線 $\gamma(\theta) = r(\theta)(\cos\theta, \sin\theta) = \cos m\theta(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta\cos m\theta, \sin\theta\cos m\theta)$ でよいですね．

質問： 円のグラフはなめらかであるが，表し方によっては陰関数定理が成り立たない時もあったのですが，例えば何か助変数表示で表された関数があって，それが陰関数定理が成り立たなかったときになめらかかどうかを判断するにはどうすれば良いのですか.

お答え： 質問の意味がわかりません．まずは言葉の意味がわかりません．「円のグラフ」って何ですか? 「円」じゃだめ?.「陰関数定理が成り立たない場合」って何ですか? 成り立たなかったら定理じゃないのでは? 「助変数表示された関数」って何ですか? この講義では曲線の助変数表示を考えましたが，関数の助変数表示は扱っていません.

質問： パラメータ表示でも陰関数表示でも，なめらかな曲線の意味は，グラフ上の任意の点の近傍で $y = f(x)$ または $x = g(y)$ と表せるということがあるのだと思いましたが $(\star)$ 授業中の例のグラフ $C = \{(x, y)|(x^2 + y^2)^2 - 1 = 0\} = \{(x, y)|(x^2 + y^2 - 1)^2 = 0\}$ については $G(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$, $H(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 1$, $dG = 0$ on C かつ $dH \neq 0$ on C となり，なめらかな曲線の定義をみたしていたり，みたさなかったりして $(\star)$ の部分と矛盾しているような気がしてよく分かりません.

お答え： いずれの表示でも $(\star)$ をみたしていますよね．なめらかな曲線の定義は満たしていると思いますが.（$dF \neq 0$ が曲線 $F = 0$ のなめらかさの定義ではありません)．ちなみに「グラフ」という語の使い方がおかしいです.

質問： 他の人なら $\sin\theta$ のように θ を用いて表すところを先生は $\sin s$ と表していますが，何か θ が嫌いな理由でもあるのでしょうか?

お答え： むしろ sin の中身を θ と書かなければならない理由があるのでしょうか．α でも β でも φ でも t でも s でもよいのでは? 講義で書いた式は，本当に “他の人なら $\sin\theta$ のように θ を用いて表すところ” なのですか? ちなみに s を用いたのは，第 3 回で扱う “弧長” と関連付けたかったからで，これはあとで説明します.

質問： 講義資料の最後の問題を授業の前日に入手できるようにして頂く事は可能でしょうか.

お答え： 可能なら，出来上がり次第 web ページにあげます．仕上がって，TA の方にチェックしてもらい，修正が上がるのが日曜日の夜か月曜日の朝というのが普通ですが．多分 (1) ミラーページ (2) 公式ページ (3) OCW の順番で更新します（公式ページは学外から更新するのに VPN 接続が必要で，少々時間がかかるので)．

質問： 前回曲線の定義について質問した者です．今回の授業でこの講義における曲線の扱いが理解できました.

お答え： よかった.

質問： 曲線の表示の仕方によらない性質について考察をするのは，図形の本質について考えているような気がしますが，表示の仕方によって変わってしまう性質というのは，考えている図形の本質とは違うような気がします.

お答え： それでよいと思います（質問になってないけど).

質問： ちらっと言っていた教科書の改訂版はいつ頃出版されますか? それまで図書館で借りてしのごうと思います．改訂されると知りながら旧版をかうのはくやしいので. **お答え：**たぶん 1 年半後くらい.

質問： 「題意」はたまに使ってしまうので気をつけようと思いました. **お答え：**そうしてください.

質問： 特に思い浮かびませんので，理解が不十分なのだと思います．精進します. **お答え：**そうしてください.

質問： 数学的なお話のネタはどこから仕入れているのですか. **お答え：**日々の生活.

質問： 毎度授業で出題される最後の問題のところ（今回の 2-1〜2-5）が全て解けなければ試験にたち打ちできませんか.

お答え： 試験は知りません．まだ問題も作ってないし．でも，全部解けてほしい.

質問： レポートの問題の解答は公開しないとのことでしたが，その理由を教えて下さい.

お答え： • ひとつの解き方に誘導したくない（個性を尊重したい)．• クラスメイトと相談・議論してほしい．• 試行錯誤をして苦しんでほしい．• めんどくさい．反論募集.

3 弧長パラメータと曲率 (テキスト §2)

■弧長パラメータ表示

■曲率・曲率円

■フルネ方程式

■曲線論の基本定理

■全曲率と回転指数

問題

3-1 懸垂線 $y = \cosh x$ に対して

(1) その弧長パラメータ表示を求めなさい.

(2) 曲率の定義から，弧長パラメータ s の関数として曲率を求めなさい.

(3) 上の結果とパラメータ変換の式を用いて曲率を x の関数で表しなさい.

(4) 一般の助変数表示に対する曲率の公式（テキスト 13 ページの式 (2.7)）を用いて懸垂線の曲率を求め，上の結果と一致することを確かめなさい.

3-2 レムニスケート

$$\left(\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1+\sin^2 t}\right) \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

の弧長関数を $s = s(t)$ とし，弧長パラメータでの表示を $\gamma(s)$ $(0 \leqq s \leqq L = s(2\pi))$ とする．$\gamma(s)$ の曲率関数を $\kappa(s)$ とするとき積分 $\displaystyle\int_0^L \kappa(s)\,ds$ の値を（計算により）求めなさい.

3-3 陰関数 $F(x,y) = x^4 + y^4 - 1 = 0$ で与えられる曲線 C を考える.

(1) C 上の全ての点は，陰関数表示 F の特異点ではないことを確かめなさい.

(2) C の曲率の絶対値が最大・最小となる点とそこでの曲率の絶対値を求めなさい.

(3) 曲率の符号はどのように定めればよいか.

3-4 パラメータ表示された曲線 $\gamma(t)$ の $t = t_0$ での速度ベクトルを $\boldsymbol{e}$, 接線を l とする．もし，t_0 での γ の曲率が正（負）ならば，t_0 の近くで $\gamma(t)$ は $\boldsymbol{e}$ に向かって l の左（右）側にある．このことを示しなさい．曲率が 0 の場合はどうか.

3-5 弧長によりパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の $s = s_0$ における曲率が 0 でないとする．このとき，3 点 $\gamma(s_0) = P$, $\gamma(s_0 + t) = Q_t$, $\gamma(s_0 - t) = R_t$ を通る円 C_t は $t \to 0$ とすると s_0 における γ の曲率円になることを示しなさい.

2013 年 10 月 28 日