2013 年 11 月 6 日 (2013 年 11 月 12 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 4

前回までの訂正

- 「中華思想」の漢字が違っていたそうです.

授業に関する御意見

- 紙を汚してしまい申し訳ありません. **山田のコメント：** いいえ.
- 板書が一枚の黒板内で右を書いたり左を書いたりとわかりにくいときがあるので，行ったり来たりしないようにしていただけるとわかりやすいです. **山田のコメント：** 了解. そういうことがあったらその場で指摘していただけると助かります.
- 曲線論の基本定理面白かったです! 曲率をみるだけでその曲線のデータが全て分かるというのは美しいと思いまいた. また，例えば「半径 r の円の曲率が $\frac{1}{r}$ であることから，半径が大きい円上だとハンドルをおだやかにきればよい」というのも日常生活の直感をうまく反映していてすごいと思いました. **山田のコメント：** 当たり前と思えることってある意味ですごいですよね.
- 曲率が何を表しているのかよくわかりました. 車の例がとてもよかったです. **山田のコメント：** 了解.
- 先生の出す日常における数学の話は興味深く今度個別指導のバイト先で中学生の生徒に話してあげようと思いました. 中学生向けのネタを探してですが.
  山田のコメント： ほとんどは山田のオリジナルではありませんが，どうぞお使いください. なお，使った結果生徒さんが引いても知りません.
- 記号の濫用 (たとえば $\gamma(t)$ / $\gamma(s)$ とか $\kappa(t)$ / $\kappa(s)$ など) が多く，たまに定義を混同してしまいます.（おそらく慣れていないのが原因ですが.） **山田のコメント：** なれると便利なので，すこしだけ慣れてください.
- とても役に立っていると思います. **山田のコメント：** 何の役にでしょう.
- テキストきたいしています. **山田のコメント：** よろしく.
- とくになし（同様の方 7 件） **山田のコメント：** me, too

質問と回答

質問： クロソイドについてですが $\kappa(s)=s\ \theta=\frac{1}{2}s^2$，$s=0$ のとき $(x,y)=(0,0)$ の図を黒板に書いていましたが，半回転してもどるとき，すなわち $s>0$ で s が 0 から大きくなり，$\theta=\frac{3\pi}{2}$ の前後で曲線は y 軸とどのように交わるのですか. (1) 2 点で交わる (2) 1 点で接する (3) 交わらない. できるだけノートの図を正確に書きたいので教えて下さい.

お答え： 自明ではありません. 高等学校で学ぶグラフは簡単なものばかりなので，多くのデータがわかるのですが，実際に具体的に与えられた関数の値を求めるのは非常に難しいのです. この問題は $x(s)=\int_0^s \cos\frac{u^2}{2}\,du$ という関数の値を求める問題で，数値計算をやってみればいいかも.

質問： 「弧長パラメータ」の考え方は一般の図形（曲面とか）に拡張できないのでしょうか? 曲面でも「標準的な座標」のようなものがとれると面白そうですが...

お答え： そういうものは取れない，と授業中に述べた. ただし，曲面（2 次元）の場合は，ある程度よい座標がとれる. 教科書の「等温座標系」の項を見よ.

質問： 弧長パラメータをとることの有用性がいまいちわかりません. 3 次以上で一般に標準パラメータがとれないとおっしゃっていたのでそう思えてしまいました.

お答え： 「3 次以上」って何でしょう.「2 次元以上の図形，曲面など」と言ったつもりですが.

質問： 曲率はある曲線を異なる 2 つの陰関数表示で示した場合にも不変なのでしょうか?

お答え： 一般論でそうなのですから，もちろん. 具体例で計算してたしかめてごらんなさい.

質問： 陰関数で表示された曲線に対して曲率を求めるとき，一般に使える公式はあるのでしょうか. それともうまいパラメータ表示を見つけなければならないのでしょうか.

お答え： 陰関数表示された曲線 $F(x,y)=0$ 上の特異点ではない点 (x_0,y_0) での曲率 κ は $|\kappa|=\frac{|F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2|}{\sqrt{F_x^2+F_y^2}^3}$ をみたす，証明は，例えば $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ なら $y=f(x)$ と書きなおしてパラメータ表示 $(x,f(x))$ の曲率を計算する．f の微分は陰関数の微分公式を用いれば簡単（だからやってみよ）．

質問： 曲率の直感的なイメージは車のハンドルのきり具合ということで大丈夫でしょうか． **お答え：**はい．

質問： 今回の 3-1 の問いで困ったのだが，弧張パラメータを求める際に長さを求めることが必要であるが，積分区間は毎回 $[0,t]$ でいいのですか? 今回は範囲が書いていなかったので，そうしたのだが，もっと一般的に $[0,t]$ にするべきですか．あるいは $|\dot\gamma(s)|=1$ になってしまえば何でもよいのですか?

お答え： $|\dot\gamma(s)|=1$ になってしまえば何でもよいです．

質問： もしある曲線 $\gamma(t)$ に対して弧張関数 $s(t)$ が積分できないとしてもそれを標準的なパラメータとして用いますか． **お答え：**微積分で習ったように連続関数は積分可能ですので，積分できないことはありません．

質問： 問 3-2 はレムニスケートの図形的な対象性（原文ママ：対称性のことか?）より直観的に求める積分値は 0 と考えても大丈夫ですか?

お答え： そのことをきちんと言葉で述べてごらんなさい．たとえばレムニスケートも原点を中心とする円は，x 軸，y 軸に関して対称ですが，前者の全曲率（曲率の積分）は 0，後者は 2π です．「対称だから」と一言で切って捨てるとこの違いが説明できません．

質問： 問題 3-2 の $\int_0^L \kappa(s)\,ds$ は何か意味ある表現なのですか． **お答え：**全曲率 (テキスト 3 節)．

質問： 問題 3-4 で，「$\boldsymbol{e}$ に向かって l の左 (右) 側にある」とありますが，授業では左側，右側という概念は直観的にしか扱っていなかったように思われます．このような場合，解答中で適切な定義を自分で与えてしまってもよいのでしょうか． **お答え：**適切ならよい．講義で「左向き単位法線ベクトル」で暗に左向きを説明していますね．

質問： 平面上の曲線 $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ を $\kappa(t)$ で表すことで情報を単略化（原文ママ：簡略化のことか）していましたが，これが空間の話になったときは，3 次元の情報から 2 次元の情報になるというように，各次元よりも 1 つ次元を下げて曲線の概形をとらえることができるのでしょうか．

お答え： 今回やる．概形ではなく，形（およそではない）ですね．

質問： この回の講義から速度ベクトルという言葉や時間微分を表すドット表記が頻繁に登場していますが，これらは特に指定の無い限り，通常のパラメータは時刻を表すものと考えて問題ないのでしょうか．

お答え： 問題がある状況が想像し兼ねますが，喩え話的な用語の使い方です．

質問： 同じ形の曲線（回転，平行移動で一致する）が曲率を定義することによって，同じ式で表現できるのがよかったです． **お答え：**ね．で質問は?

質問： 曲率がきまればそれに対し，図形がきまるということでしたが，同じ図形に対して異なる方程式が存在するときは，いったいどの方程式が出るのでしょうか．

お答え： 方程式がでる（決まる）のではありません．あくまでも図形がきまるのです．

質問： “曲率の図形的いみ” の “いみ” が “意味” でなかったことになにか意味があったのですか?

お答え： いみはありません．

質問： 今回の講義で「曲線論の基本定理」というものが出てきました．他にも代数，解析で「代数学の基本定理」「微積分学の基本定理」というのが出てきましたが，基本定理というのはどういうことですか?

お答え： その分野で「基本的」と思われる定理．

質問： 陰関数表示，パラメータ表示のどちらか片方でしか表せない曲線はそんざいしないと解答されましたが，例えば $F(x,y)=0$ (任意の (x,y) で 0 になる) やパラメータ表示 $x(t)=1$, $y(t)=2$ についてはどのように考えるべきなのでしょうか． **お答え：**特異点でない，という文脈で考えていませんでしたっけ．

質問： 単に「曲率を求めよ」という問題が出た場合，曲率の変数は（授業でいう）s で求めるのが一般的ですか．t に換算し直した方が良いのでしょうか．

お答え： 問題による（山田の問題は明示してある）．解答としては「どちらで書いたか」が明示してあればよい

質問： なぜ点の進行方向を軸とし，曲率という考えをすることが中華思想になるのでしょうか．西洋ではイギリスやアメリカなど新しい島を見つける毎に自分の文化の方が優れていると思い込み，征服と自国の分科技術の導入をしてきました．自己中心的という意味では特別中華でなくてもよいと思うのですが，どうでしょうか．

お答え： 喩え話，というのは，余計な情報をいろいろ含んでいて，物事の本質を理解するのに邪魔になる（邪念がはいる）ことがありますね．というわけで，これはただの喩え話で，一つの側面を述べただけ．

質問： 面白い問題でした! **お答え：**そうですか．で質問は?

4 空間曲線

■平面曲線の全曲率と回転数 （前回の積み残し）

■空間曲線の曲率と捩率

■フルネ・セレの公式と曲線論の基本定理

- フルネ枠 $\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$/ フルネ・セレの方程式/ 曲線論の基本定理

■曲率・捩率の図形的な意味

- 平面曲線となるための必要十分条件/ブーケの公式.

問題

4-1 曲率が一定な球面曲線は円である.

4-2 半径 a の球面上の曲線 $\gamma(s)$ (s は弧長) の捩率が 0 でないとき，曲率 κ と捩率 τ は

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2 = a^2$$

を満たす.

4-3 空間曲線 $\gamma(s)$ の $s = s_0$ における単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(s_0)$, 主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s_0)$, 従法線ベクトル $\boldsymbol{b}(s_0)$ がそれぞれ x, y, z 軸の正の方向を向き，$\gamma(s_0) = 0$ となるような座標系をとる．このとき，$s = s_0$ の近くでの曲線の像の xy 平面，yz 平面，zx 平面への正射影はどのような形になるか，図示しなさい．ただし s_0 における曲率と捩率はともに正の値をとるとする.

4-4 弧長でパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の曲率，捩率が

$$\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}, \qquad \tau(s) = \frac{2}{1+s^2}$$

で与えられているとする.

- ある一定な単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\gamma'(s)$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角が一定であるようなものが存在することを示しなさい.
- この $\boldsymbol{v}$ に対して，$\gamma(s)$ の，$\boldsymbol{v}$ の直交補空間への正射影 $\gamma^* = \gamma(s) - \bigl(\gamma(s)\cdot\boldsymbol{v}\bigr)\boldsymbol{v}$ はどんな曲線か.

4-5 原点を中心とする半径 1 の球面上の曲線 $\sigma(t)$ ($|\sigma| = 1$) が $\det(\sigma, \dot\sigma, \ddot\sigma) \neq 0$ を満たしているとする．このとき，

$$(*) \qquad \gamma(t) := \int^t (\sigma(u) \times \dot\sigma(u))\,du$$

とおくと，γ は 0 でない曲率をもち，捩率が 1 となる曲線となる．逆に，曲率が 0 にならず，捩率が 1 となるあるような曲線 γ に対して，ある球面上の曲線 σ で (*) を満たすものが存在する．（ヒント：$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{b}$）

2013 年 11 月 6 日 (2013 年 11 月 12 日訂正)