

## 幾何学概論講義資料 5

## 前回の補足

- 高次元ユークリッド空間の曲線の曲率についてのご質問が複数ありました．次のような設定が普通のもので：弧長によりパラメータ付けられたなめらかな曲線  $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $J \subset \mathbb{R}$  は区間) に対して

$$\begin{aligned} e_1 &:= \gamma', & \kappa_1 &:= |e_1'|; & e_2 &:= \frac{e_1'}{\kappa_1}, & \kappa_2 &:= |e_2' + \kappa_1 e_1| \\ e_3 &:= \frac{e_2' + \kappa_1 e_1}{\kappa_2}, & \kappa_3 &:= |e_3' + \kappa_2 e_2|; & \dots & & \dots & \\ e_{n-1} &:= \frac{e_{n-2}' + \kappa_{n-3} e_{n-3}}{\kappa_{n-2}} \end{aligned}$$

とおくと  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  は正規直交系をなすので， $e_n$  をこれらに直交する単位ベクトルで  $\mathcal{F} := (e_1, \dots, e_n) \in \text{SO}(n)$  となるようにとり， $\kappa_{n-1} = -e_n' \cdot e_{n-1}$  とおく．こうやってできる  $\mathcal{F}$  を  $\gamma$  のフルネ枠， $e_j$  ( $j \geq 2$ ) を第  $j$  法線， $\kappa_j$  を第  $j$  曲率という．なお，このフルネ枠が存在するためには， $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2}$  が 0 にならないことが必要である． $\mathbb{R}^3$  の曲線のフルネ枠は曲率が 0 でない曲線に対して定まることを思い出そう． $\mathbb{R}^n$  の曲線のフルネ方程式を書いてみよ．

- 平面曲線の滑らかな変形とはなにか，というご質問が複数ありました．教科書 26 ページです．

## 前回までの訂正

- 講義資料 4, 問題 4-5: 下から 3 行目: 換率が 0 でない一定な値をとる  $\Rightarrow$  **換率が 1 となる**
- 講義資料 4, 問題 4-5: 下から 2 行目: 換率が 0 でない定数であるような  $\Rightarrow$  **換率が 1 であるような**

## 問題に対するコメント

講義資料 4 の問題に対するコメント：

- 4-1: 4-2 の仮定で ( $\tau$  の値に関わらず)  $(\kappa^2 \tau^2)(a^2 \kappa^2 - 1) = (\kappa')^2$  が成り立つことを用いる．
- 4-2: 簡単のため  $a = 1$  とする．一般の  $a$  に対して各自書き換えてみよ．  
 $v = \gamma$ ,  $e = \gamma'$ ,  $w = v \times e$  とすると， $(v, e, w)$  は正規直交基をなし， $\mathcal{F}(s) := (v, e, w) \in \text{SO}(3)$  となる．さらに， $v' = e$ , また

$$e' \cdot v = \gamma'' \cdot \gamma = (\gamma' \cdot \gamma)' - \gamma' \cdot \gamma' = -1, \quad e' \cdot e = 0, \quad |e'| = \kappa$$

から  $e' = -v \pm \sqrt{\kappa^2 - 1}w$  を得る．これらから

$$(v, e, w)' = (v, e, w) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \mp \sqrt{\kappa^2 - 1} \\ 0 & \pm \sqrt{\kappa^2 - 1} & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つことがわかる．ここで  $v \times e = w$ ,  $e \times w = v$ ,  $w \times e = v$  だから

$$\kappa n = e' = -v \pm \sqrt{\kappa^2 - 1}w, \quad \kappa b = \pm \sqrt{\kappa^2 - 1}v + w$$

なので,

$$(\kappa b)' = \kappa' b + \kappa b' = \frac{\pm \kappa \kappa'}{\sqrt{\kappa^2 - 1}}v + (*)e.$$

この両辺に  $n$  を内積して,  $b' \cdot n = -\tau$  に注意すれば結論が得られる．

- 4-3: ブーケの公式 (教科書 51 ページ) を用いる．
- 4-4:  $v = \frac{1}{\sqrt{5}}(2e + b)$  ( $e, b$  はそれぞれ  $\gamma$  の単位速度ベクトルと従法線ベクトル) とおくと,  $\tau = 2\kappa$  であることに注意すればフルネの公式から  $v' = 0$ ．また  $e, b$  がたがいに直交する単位ベクトルであるから  $|v| = 1$ ．さらに  $\gamma' \cdot v = e \cdot v = 2/\sqrt{5}$  は  $\gamma'$  と  $v$  のなす角の余弦だから  $v$  が求めるベクトルである．(一般に  $(\tau e + \kappa b)/\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$  を Darboux ベクトルという． $\tau/\kappa$  が定数ならばこのベクトルは一定である．) さらに  $\gamma^*$  の速度ベクトル, 加速度ベクトルを計算すると,  $\gamma^*$  の弧長パラメータ  $u$  は  $s = \sqrt{5}u$  を満たし,  $\gamma^*$  の曲率は  $1/(1 + 5u^2)$  である．
- 4-5: (この節の訂正を参照)  $\gamma$  の定義は  $\sigma$  のパラメータのとり方によらない (確かめよ) なのでパラメータは  $\sigma$  の弧長パラメータとしてよい．このとき  $\sigma$  と  $\dot{\sigma}$  は互いに直交する単位ベクトルだから,  $(\sigma, \dot{\sigma}, \sigma \times \dot{\sigma})$  は正規直交系をなす．とくに  $e = \dot{\gamma} = \sigma \times \dot{\sigma}$  は単位ベクトルなので  $\gamma$  も弧長でパラメータ付けられている．さらに  $\dot{e} = \ddot{\gamma} = \sigma \times \ddot{\sigma}$  は  $\sigma$  と  $\sigma \times \dot{\sigma}$  に直交しなければならないので  $\dot{e}$  に平行．したがって主法線は  $n = \pm \dot{\sigma}$ , 従法線は  $b = e \times n = \mp \sigma$  となる．とくに  $\dot{b} \cdot n = -1$  なので, 捩率は 1．逆に, 捩率が 1 なら  $b' = -n$  なので  $\sigma = b$  とおけば  $\gamma' = e = n \times b = \sigma \times \sigma'$  となる．

## 授業に関する御意見

- なるっべく略字や続き字をなくしていただけると読みやすいです．板書をしていてそのことについて考えている間に次のを書かれています, その時に略字で雑に書かれているものがあるとわからない時がある．  
山田のコメント: 善処します．ただ, ノートは“メモ程度”にしてあとでまとめ直すのが効率がよいと思います．
- ときどき英単語が出てくるのだが (原文ママ), 先生の書き方によっては読めないことがあります... もっとキレイに書いてほしいです．  
山田のコメント: 申し訳ない．善処します．
- 今週の演習は, 翌日までに全問解くのは難しいですが, 一週間遊ぶにはちょうどよいと思います．今後も期待します．  
山田のコメント: 期限の件, 申し訳ない．今後も遊べる問題が出せるよう努力します．
- 授業内容はわかりやすくありがたいですが, レポート提出の期限がシビアで大変です～  
山田のコメント: この科目はさっさと片付けて他の科目を頑張ってください．
- 空間曲線に関する具体例をもっと多く説明して欲しいです．  
山田のコメント: テキストにもあまり紹介していませんが, 演習問題にいくつかありますね．
- 特にありません．global university の話がおもしろかったです．  
山田のコメント: ですよ．
- 今回は特にありません/とくにありません．  
山田のコメント: me, too.

## 質問と回答

質問: 問 4-2 の等式で  $\kappa'$  ( $\kappa$  の微分) が現れているが, その計算または求め方がよくわかりません．

お答え: そうですか, としか言いようがないですが, 問 4-2 は一般の曲線に関する等式ですから,  $\kappa$  は具体的な関数ではないので, その微分も“ $\kappa$  の導関数”であるというだけです．この文脈でいえば,  $e' = \kappa n$  なので  $e'' = \kappa' n + \kappa n'$  というように, なにも考えなくても  $\kappa'$  が出てきます．

質問: 2次元では一般のパラメータで曲率を計算する式を求めましたが, 3次元では扱いませんでしたね．それほど重要でないということか, 各自の演習とすることでしょうか．

お答え： “一般のパラメータで書く式が必要”ということ平面曲線の項目で理解していただけたので、こういう質問ができるのですよね。それでよいのです。“式が必要”という問題意識があれば、答えは自動的についてきます。答えを知りたいければ教科書 47 ページ。

質問： 空間曲線だと  $\gamma'''$  まで考えないといけない話があったかと思いますが、それは  $b'$  に  $\gamma'''$  が入ってくるからでしょうか？

お答え： そうです。

質問： 捩率が 0 の曲線は平面曲線とのことでしたが、曲線がある点で 0 でない捩率をもつということはその点の周りで曲線が平面曲線ではないということでしょうか？

お答え： そうです。

質問： 線型常微分方程式がわからなかったのですが、今後もまたすぐに幾何学の講義でできますか。それなら他の講義で微分方程式を習うよりも前に自分で学習しなければならないので。

お答え： 常微分方程式がでてくるのは、たぶん測地線の項。テキストの付録 A に書いてある程度のことをとりあえず認めていただければよいと思います。

質問： 空間曲線の中で  $b = e \times n$ ,  $\tau = -b' \cdot n$  より  $b' = e' \times n + e \times n' \Rightarrow \tau = -e' \times n \cdot n + e \times n' \cdot n = e'$  と言えるのか？

お答え： ナンセンス。最後の等式の左辺はスカラ、右辺はベクトルなので成り立つわけがありません。ナンセンスな等式  $(a \times b) \cdot c = a \times (b \cdot c)$  が誤りなんです。右辺の  $\times$  がベクトルとスカラの外積という意味のないものになっていますね。数式の操作の際に注意すべきは、扱っている量がスカラなのかベクトルなのか行列なのか、それに対して許される操作を行なっているのか、をきちんと点検することです。

質問： ガウス写像は全射で単射ではないであってますか？

お答え： 平面閉曲線のガウス写像は全射であるが単射であるとはかぎらない。太字に相当する部分が間違っています。

質問： 提出問題の中では多くの内積、外積の計算ができましたが、ただ単に式だけをいじっていると図形としての性質（たとえば  $\bigcirc\bigcirc$  と  $\square$  が直交している）が見えにくく、問題を解くのに莫大な時間をつかってしまいました。やはりイメージしやすくするたえに絵も書いた方が良いですかね。

お答え： イメージというのは個人的なものですから、ご自分が絵を書きたいと思うなら書いた方がよいでしょう。注意点として、自分のイメージは他人に伝えにくい、他人のイメージは自分に伝わりにくい、ということを忘れないこと。ですから正確に伝えるために論理と数式があるのだと思って下さい。莫大な時間を使ったというのは良いことだと思います。

質問： 空間曲線を扱うときにも  $\dot{\gamma} \neq 0$  を仮定して理論を展開していますが、もし  $\dot{\gamma} = 0$  ならどんなおかしいことが起きるのでしょうか？

お答え： 平面曲線と同様、なめらかな図形にならない可能性があります。平面曲線は空間曲線の特別な場合だから、例は簡単に見つかる。

質問： 回転数とは閉曲線の分類分け以外に使いみちはあるのだろうか？

お答え： 「分類分け」という単語は聞いたことがありませんが、どいういう意味でしょうか？

質問： とくになし/今回は特にありません。

お答え： 残念です。

## 5 曲面

曲面のパラメータ表示 (テキスト §6)

2変数関数のグラフ/陰関数表示とパラメータ表示/パラメータ変換/単位法線ベクトル/面積

### 問題

5-1  $\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}^3$  への滑らかな写像

$$p(u, v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$$

について,

- (1)  $p_u$  と  $p_v$  が一次従属であるような  $\mathbb{R}^2$  の点  $(u, v)$  の集合を求めなさい.
- (2)  $p(a_1) = p(a_2)$  ( $a_1 \neq a_2$ ) となる  $\mathbb{R}^2$  の点の組  $(a_1, a_2)$  をすべて求めなさい.
- (3) 滑らかな写像  $\nu: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  で,  $|\nu| = 1$ , かつ  $\mathbb{R}^2$  の各点で  $\nu \perp p_u, \nu \perp p_v$  を満たすものを求めなさい.

5-2 単位球面のふたつのパラメータ表示

$$p(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u),$$

$$\tilde{p}(\xi, \eta) = \left( \frac{2\xi}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \frac{2\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{1 + \xi^2 + \eta^2} \right)$$

(定義域は適当に考えよ) の間の座標変換を与えなさい.

5-3 陰関数表示  $F(x, y, z) = 0$  で表示された滑らかな曲面上の点  $(x_0, y_0, z_0)$  における単位法線ベクトルは

$$\pm \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|} \Big|_{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)} \quad \text{grad } F = (F_x, F_y, F_z)$$

であることを示しなさい.

5-4 平面上の長さ  $\mathcal{L}$  の閉曲線  $\gamma(s)$  ( $s$  は弧長) の重心とは,

$$\frac{1}{\mathcal{L}} \int_0^{\mathcal{L}} \gamma(s) ds$$

で与えられる平面上の点である.

$xz$  平面の上半平面 ( $\{(x, z) \mid z > 0\}$ ) 上の閉曲線  $\gamma(s)$  を  $x$  軸の回りに回転して得られる曲面の面積は,  $\gamma$  の重心が回転した道のりと  $\gamma$  の長さの積である. このことを示しなさい.

5-5 助変数表示された曲面

$$p(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$$

と  $(u, v)$  平面上の曲線

$$\gamma_\theta(t) = t(\cos \theta, \sin \theta) \quad t \in [0, 1]$$

に対して,  $p \circ \gamma_\theta$  は, 曲面上の曲線となる.  $\theta$  が  $-\pi$  から  $\pi$  まで変化するときの, この曲線の長さの最大値, 最小値を求めなさい.