2013 年 11 月 18 日 (2013 年 11 月 25 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 6

前回までの訂正

- 曲面の陰関数表示の説明で「$F(x,y,z)=0$ をみたす点で $(F_x,F_y,F_z)\neq(0,0,0)$ でない...」と言ったそうです．「でない」ではなく「である」ですね．
- 講義資料 5, 2 ページ，下から 4 行目：$\boldsymbol{e}''=\kappa'\boldsymbol{n}+\kappa\boldsymbol{n}\Rightarrow\boldsymbol{e}''=\kappa'\boldsymbol{n}+\kappa\boldsymbol{n}'$
- 講義資料 5, 4 ページ，問題 5-4: xz 平面上 $\Rightarrow$ xz 平面の上半平面（$\{(x,z)\,|\,z>0\}$ 上

問題に対するコメント

講義資料 5 の問題に対するコメント：

- 5-1: $6u^2+v=0$ となる (u,v) 上で p_u と p_v は線形従属となるが，その点でも問題の条件をみたす ν は存在する：$(1,-u,u^2)/\sqrt{1+u^2+u^4}$ とすればよい．
- 5-2: パラメータ変換は $u=u(\xi,\eta)$, $v=v(\xi,\eta)$ の 2 つでひとまとまり．別々の場所に答えを書くのはおかしい．変換 $(u,v)\mapsto(\xi,\eta)$ は直接立体射影の式を使えばでてくる．
- 5-3: $F_z=0$ の点で $z=f(x,y)$ とあらわしておいて法線をもとめ，陰関数の微分公式を用いる．
- 5-4: $\gamma(s)=\bigl(x(s),z(s)\bigr)$ $(z>0)$ とおくと，考える曲面は
$$\bigl(x(s),z(s)\cos t,z(s)\sin t\bigr)\qquad(-\pi<t\leqq\pi)$$
とパラメータ表示される．
- 5-5: 曲線の長さは $\int_0^1\sqrt{1+4t^2\cos^2 2\theta}\,dt$ だから $\cos^2 2\theta=1$ のとき最大，0 のとき最小．

授業に関する御意見

- 話していることが少し速いので，ついていけなかったり聞き取れないときがあります．もう少しゆっくりな時があると嬉しいです．　**山田のコメント：** Sorry.
- 採点の文字が読みにくいです．　**山田のコメント：** Sorry.
- いつも通りおもしろい授業をお願いします．　**山田のコメント：** 大変なんですが.
- 本日もわかりやすい授業をありがとうございました．　**山田のコメント：** わかりにくい授業を目指しているんですが.
- 提出問題は易しいものを希望します．それ以外はありません．
  山田のコメント： どうせみなさん馬鹿だから易しい問題を出す，ってこと？ それじゃ失礼ではありませんか．
- 黒板 1 枚書き終えてとなりの黒板にいく時は，書き終えた黒板を上にあげてから次にいって欲しいです．　**山田のコメント：** 了解．でもどうして？
- リンゴとミカンの話は，私達（2012 年度入学）の代の 1 類学科オリエンテーションの時間にされていたと思います．山田先生の顔までは恥ずかしながら覚えていませんでしたが，とても興味がそそられるものでした．
  山田のコメント： 理学セミナーじゃなかったっけ．
- 特にありません ×4/とくにありません/ 今回は特にありません/なし
  山田のコメント： me, too

質問と回答

質問： 陰関数表示 $F(x,y,z)=0$ はその点の近くで $z=f(x,y)$ や $x=f(y,z)$ などと表されることが曲面となる条件なのですか?

お答え： ちゃんと定義していませんが “なめらかな曲面” の条件です.

質問： 講義の始めの方で言われていた「$\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$ でなくても $dF=(F_x,F_y,F_z)=(0,0,0)$ でない点の周りでは滑らかな曲線である」というのも陰関数定理から導出される結果ですか?

お答え： 曲面ですね.

質問： $p(u,v)$; $p_u \not\parallel p_v$ をみたす曲線 $u=u(\xi,\eta)$, $v=v(\xi,\eta)$： パラメータ変換において，単位法線ベクトルの向きは,

$$\frac{p_\xi\times p_\eta}{|p_\xi\times p_\eta|}=\frac{u_\xi v_\eta-u_\eta v_\xi}{|u_\xi v_\eta-u_\eta v_\xi|}\frac{p_u\times p_v}{|p_u\times p_v|}$$

であるが，このパラメータ変換での単位法線ベクトルの向き ± 1 は図形的にどのように考えるのですか.

お答え： パラメータ変換 $(u,v)\mapsto(\xi,\eta)$ が $\mathbb{R}^2$ 上の向きを保つか反転するかです.

質問： $(p_\xi,p_\eta)=(p_u,p_v)\begin{pmatrix}u_s & u_\eta\\ v_s & v_\eta\end{pmatrix}$ （原文ママ：s は ξ のことか）からどうやって $\frac{p_\xi\times p_\eta}{|p_\xi\times p_\eta|}=\frac{u_\xi v_\eta-u_\eta v_\xi}{|u_\xi v_\eta-u_\eta v_\xi|}\frac{p_u\times p_v}{|p_u\times p_v|}$ が導けたかわかりません．特に分母の方．なんとなく行列式を使った感じはしますけど...

質問： $p_\xi=u_\xi p_u+v_\xi p_v$, $p_\eta=u_\eta p_u+v_\eta p_v$ の両辺の外積（ベクトル積）をとって，ベクトル積の双線形性と交代性を用いる.

質問： パラメータ表示したときに，変数が 1 つであるものが曲線で，変数が 2 つであるものが曲面なのでしょうか.

お答え： 大体そうです.

質問： p_u と p_v が線型独立でないとどう都合がわるいのですか.

お答え： u 曲線と v 曲線が横断的に交わらない，ということを講義で説明した.

質問： p_u と p_v が一次独立であることが $|p_u\times p_v|\neq 0$ と対応していて驚きました．一次独立を外積を用いて定義できるのは 3 次元ベクトルの場合だけでしょうか.

お答え： そうです（このような形の外積は，一般次元では定義できない).

質問： 今回の問題 5-1 (3) で p_u と p_v が一次独立でない場合はどう考えれば良いのでしょうか.

お答え： なにも考えずに $p_u\times p_v$ を計算してその結果をよく見るとわかる.

質問： 今回 5-1 (3) を解くにあたり，$\nu=\pm\frac{(1,-u,u^2)}{\sqrt{1+u^2+u^4}}$ という v によらない答えが得られました．これは何に起因するものなのでしょうか．とても興味深く感じました.

お答え： このことから，曲面が平坦（ガウス曲率が 0）であることが言えます．2 回くらい後で説明します.

質問： 5-1 の問題では $\mathbb{R}^2$ の点を $\mathbb{R}^3$ の点に写す写像を考えていましたが，$\mathbb{R}^2$ の可測領域を $\mathbb{R}^3$ の可測領域に移すことができると思うのですが，そのとき面積も○○倍になりますよね? このとき○○倍は定数ではないと思うのですが，なんらかの式で表せますか?

お答え： 意味がよくわかりませんが，写像 $f\colon\mathbb{R}^2\supset D\to\mathbb{R}^3$ に対して，$\mathbb{R}^2$ のルベーグ測度で測った D 測度と $\mathbb{R}^3$ のルベーグ測度で測った $f(D)$ の測度の比のことをおっしゃっているのでしょうか．写像 f が滑らかな曲面のパラメータ表示なら，○○は 0 です．Sard の定理の特別な場合.

質問： 曲面上で u 曲線と v 曲線はいつも直交しますか.

お答え： いいえ.

質問： 自己交叉する曲面に対して， 授業中に扱った面積の式を使って面積を定義することはできますか.

お答え： できます.

質問： 一般の曲面の面積はパラメータのとり方によって変化しますが，正則にパラメータづけられた曲面の面積はパラメータによらず一定と考えてよいのでしょうか.

お答え： いいえ，パラメータのとり方によって変化しません.

質問： 球面のパラメータで $p(u,v)=(\cos u\cos v,\cos u\sin v,\sin u)$ （違度経度; 原文ママ）と $\tilde{p}(\xi,\eta)=\frac{1}{1+\xi^2+\eta^2}(2\xi,2\eta,\xi^2+\eta^2-1)$ （立体射影）の 2 つの例がありましたが，どちらも北極 $(0,0,1)$ で正則になっていないとのことでしたが，北極でもうまく定義させるには他のうまいパラメータを取り直せば良いんですよね?

お答え： 良いんです．南極からの立体射影でいいですよね．ところで「定義させる」ではなく「定義する」では? だれ

に「させる」の?

質問： 現実の計算に有用かどうかは知りませんが，N(0,0,1) と $z_0 \in [-1,1)$ に対し， 単位球面上の任意の N でない点 P をとり，直線 NP と平面 $z=z_0$ との交点の座標を (x,y,z_0) として，組 (x,y) を P と対応させる座標のとり方が一般には可能で，授業でやったのはその $z_0=0$ の特別な場合ということですか．

お答え： そうですが，やってみました? 式を書いてごらんなさい．

質問： 単位球面に関する正則なパラメータ表示を考えたとき，$p(u,v)=$ (略：緯度経度) では極 $(0,0,\pm 1)$ が，$p(\xi,\eta)=$ (略：立体射影) では北極 $(0,0,1)$ がそれぞれ表せなかったと思いますが，この点も含めて全体を正則なパラメータで表示することは可能でしょうか．一点でも抜け落ちたら「単位球面」のパラメータ表示ではないような気がしますが... また，先週の問題 4-1 で，実際には「円の一部」という曲線が表れる（原文ママ：現れる？）と思いますが，これも「円」といって問題はないのでしょうか．

お答え： 前半：球面を $\mathbb{R}^2$ の領域上で定義された一組のパラメータで表示することはできません．したがって「球面のパラメータ表示」というのはその一部を表示するものと思っていただくのがよいと思います．後半：そうですね，本来円の一部というべきですね．

質問： 解析学の授業で (x,y,z) を今回の $(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u)$ の様に置換して重積分を解いたのですが，そのときに $u=\frac{\pi}{2}$ の点について特に言及せずに重積分を行いました．それは実際は広義積分ということになるのですか? それとも幾何学においてはそこを除くということですか．

お答え： すくなくとも “曲率を求める” ための様々な計算はそこではできません．「幾何学ではそこを除く」なんていう大それたことではありません．積分の問題の場合はその点でヤコビ行列式が 0 になるので広義積分というわけではありませんね．まずい点は 1 点だけなので，積分には関係しない（測度 0）ということです．ちなみに「重積分を解く」という言い回しには強烈な違和感を持ちます．「重積分を求めよという問題を解く」のは正しいですが，「重積分」自体はひとつの値なわけですから「重積分を求める」が正しいのでは? （数学とは演習問題である，という呪縛から逃れられていないように思います.）

質問： 特にありません．授業後の質問に丁寧に答えてくれてありがとうございます．

お答え： どういたしまして．

質問： 今回は特にありません (2 件)/特にないです/特にありません (2 件)/ とくになし．

お答え： me, too.

6 第一基本形式

問題

6-1 2 変数関数の「全微分」とは何か．さらに，それが座標によらない，ということはどういうことか．

6-2 パラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ に対して，$\hat{p}(u,v)=Rp(u,v)+\boldsymbol{b}$ (R は 3 次の直交行列，$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$) とおくと，

$$R\frac{p_u\times p_v}{|p_u\times p_v|}=\pm\left(\frac{\hat{p}_u\times\hat{p}_v}{|\hat{p}_u\times\hat{p}_v|}\right)$$

であることを示しなさい．ただし $\pm$ の符号は R の行列式の符号である．

6-3 パラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ の第一基本量を E, F, G とするとき，

- $EG-F^2=|p_u\times p_v|^2>0$ である．
- uv 平面上の曲線 $\gamma(t)=\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ $(a\leqq t\leqq b)$ に対して, 空間曲線 $\tilde{\gamma}(t)=p\circ\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ の時刻 t における速度ベクトルは

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{dt}(t)=p_u\bigl(u(t),v(t)\bigr)\frac{du}{dt}+p_v\bigl(u(t),v(t)\bigr)\frac{dv}{dt}$$

2013 年 11 月 18 日 (2013 年 11 月 25 日訂正)

となる．さらに曲線 $\tilde{\gamma}$ の長さは

$$\int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

であたえられる．ただし $E = E\bigl(u(t), v(t)\bigr)\ldots$ である．

- $P = p(u_0, v_0)$ における接ベクトル空間 S_P の 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = a_1 p_u + a_2 p_v, \qquad \boldsymbol{b} = b_1 p_u + b_2 p_v,$$

の内積は

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_1, a_2)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

である．

- $\hat{p}(u,v) = Rp(u,v) + \boldsymbol{b}$ (R は 3 次の直交行列，$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$) とすると $\hat{p}$ と p の第一基本行列は一致する．
- $\tilde{p}(\xi,\eta)$ を $p(u,v)$ からパラメータ変換 $(u,v)\mapsto(\xi,\eta)$ によって得られる曲面，$\tilde{p}$ の第一基本量を $\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}$ とすると，

$$\begin{pmatrix} \widetilde{E} & \widetilde{F} \\ \widetilde{F} & \widetilde{G} \end{pmatrix} = {}^t J \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J \qquad \left(J = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}\right).$$

- 第一基本形式

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

はパラメータのとりかたによらない．

6-4 $p\colon \mathbb{R}\times(-1,1)\to\mathbb{R}^3$ を

$$p(u,v) = \left(\left(2 - v\sin\frac{u}{2}\right)\cos u, \left(2 - v\sin\frac{u}{2}\right)\sin u, v\cos\frac{u}{2}\right)$$

とおくと，像 $p\left(\mathbb{R}\times(-1,1)\right)\subset\mathbb{R}^3$ はメビウスの輪である（テキスト 62 ページ問題 2）．u の変域を $\mathbb{R}$ 全体にするとこの写像は単射ではないが，制限

$$p_1 = p|_{(-\pi,\pi)\times(-1,1)}, \qquad p_2 = p|_{(0,2\pi)\times(-1,1)}$$

はともにこの曲面の（ほとんどの部分の）パラメータ表示をあたえている．p_1 と p_2 のパラメータ変換はどうなっているか．とくに，そのパラメータ変換は向きを保っているか．（注：p_1 の像と p_2 の像の共通部分は連結ではない．各々の連結成分ごとにパラメータ変換を求めなさい）

6-5 曲面 $p(u,v)$ のパラメータ (u,v) が等温座標系であるとは，第一基本量が $E=G$, $F=0$ を満たすことである．このとき，さらにこのパラメータ表示から向きを保つパラメータ変換で得られる同じ曲面のパラメータ表示 $\tilde{p}(\xi,\eta)$ で (ξ,η) が等温座標系であるための必要十分条件は

$$u + iv \longmapsto \xi + i\eta$$

が（複素関数論の意味で）正則関数となることである．