2013 年 11 月 25 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

# 幾何学概論講義資料 7

## お知らせ

- 次回，12 月 2 日に中間試験の予告をいたします．皆様お誘い合わせの上おいでください．

## 前回の補足

**■2 次形式について**　与えられた $m$ 次実対称行列 $A$ を用いて $\mathbb{R}^m$ のベクトルに実数を対応させる写像

$$(*)\qquad Q\colon \mathbb{R}^m \ni \boldsymbol{x} \longmapsto Q(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R};\qquad Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}\qquad (A \text{ は } m \text{ 次実対称行列})$$

を定める．このような写像を $\mathbb{R}^m$ の 2 次形式，$A$ をその表現行列という．

線形代数で学んだ次の事実を思い出そう（忘れてはいけない事実）：

- 実対称行列の固有値はすべて実数である．
- 実対称行列は直交行列により対角化できる．

**定義：** 2 次形式 $(*)$ が**正値（負値）**であるとは，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して $Q(\boldsymbol{x}) > 0$ $(Q(\boldsymbol{x}) < 0)$ となることである．

**定理：** 2 次形式 $(*)$ が正値（負値）であるための必要十分条件は，表現行列 $A$ の全ての固有値が正（負）となることである．

**系：** とくに $m = 2$ のとき，2 次形式 $(*)$ が正値（負値）であるための必要十分条件は，表現行列 $A$ が $\det A > 0$, $\operatorname{tr} A > 0$ （$\det A > 0$, $\operatorname{tr} A < 0$）となることである．

証明は，行列の対角化を用いる（どの線形代数の教科書にも書いてある．授業ではやっていなくても教科書は持ってますよね!）

## 前回までの訂正

- 講義資料 6, 問題 6-2

$$\frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} = \pm\frac{\hat{p}_u \times \hat{p}_v}{|\hat{p}_u \times \hat{p}_v|} \qquad\Rightarrow\qquad R\frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} = \pm\left(\frac{\hat{p}_u \times \hat{p}_v}{|\hat{p}_u \times \hat{p}_v|}\right)$$

- 講義資料 6, 4 ページ 11 行目：$(\xi,\eta) \mapsto (u,v) \Rightarrow (u,v) \mapsto (\xi,\eta)$

## 問題に対するコメント

講義資料 6 の問題に対するコメント：

- 6-1: 全微分を「記号的」に理解できる人と “$du$” などの “変な” 記号は嫌だ，という人がいるようですね．山田は大抵次のような説明をします．(多様体論の授業で “$\{du, dv\}$ が接空間の双対空間の基底”

とか “$df$ が接空間の双対空間の元” という感じのことをならうはずで，それに近い（初等的な）説明です）：

$\mathbb{R}^2$ の領域 $U$ で定義された関数 $f\colon U \ni (u,v) \mapsto f(u,v) \in \mathbb{R}$ が $p=(a,b)$ で微分可能であるとは，

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\alpha h+\beta k+R(h,k) \qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

をみたす定数 $\alpha$, $\beta$ が存在する．この式を

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=(\alpha,\beta)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+R(h,k)=df_p\boldsymbol{h}+R(h,k) \qquad df_p=(\alpha,\beta), \quad \boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$$

とかき，$df_p$ を $f$ の $p$ における**全微分**または**微分**という．微積分で学んだように

$$df_p=\left(\frac{\partial f}{\partial u}(p),\frac{\partial f}{\partial v}(p)\right)$$

である．ここで $p$ も動かすことを考え，$(u,v)$ の関数を成分にもつ行ベクトル

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

を単に $f$ の全微分とよぶ．ここで $f_1(u,v)=u$, $f_2(u,v)=v$ とすると，

$$df_1=(1,0), \qquad df_2=(0,1) \qquad \text{すなわち} \qquad du=(1,0), \qquad dv=(0,1)$$

なので，

$$df=(f_u,f_v)=f_u\,du+f_v\,dv$$

と書ける．これが全微分の習慣的な書き方である．

- 6-2: 上にのべたように誤り．きちんと修正して証明できた方多数．一方，問題の通りに「証明してしまった」方が数名いらっしゃいました．こういうとき「出題ミスは減点しない」という不思議なルールがありますが，気がついた人と気が付かなかった人で評価に差をつけるべきと思いましたので，そうしました．

## 授業に関する御意見

- もう少し平易な内容を例題を交えてゆっくり進む授業がいいです．具体的な計算を扱ってください．

  **山田のコメント：** 十分平易だと思っています．具体的な計算は円柱面でやったね．それ以上？時間が足りないんじゃない？それとも「曲線や曲面」の授業をやらないほうがいいの？あなたにとって「平易」とは何かを説明してほしいです．
- 去年の線形代数ではクラスによって習っているものと習っていないものがあるようです．例えば今回の正値 2 次形式などは，言葉自体出てきていなかったため，去年やったからいいよねという感じですすめられるとわからないことがあるのでしっかり説明が欲しいです．

  **山田のコメント：** というわけで，このノートで説明しました．「線形空間論」でもやってませんか？（前提科目としたほうがよいかもね）
- 特にありません（3 件）/ありません/なし　**山田のコメント：** me, too

## 質問と回答

**質問：** 曲面 $p(u,v)$ において，第一基本量の $F=0$ なら $u$ 曲線 $\perp$ $v$ 曲線という話が有りましたが，$F\neq 0$ の場合ももちろんありますよね．

**お答え：** あります．

**質問：** 内積が “分度器付きものさし” ということは内積空間はながさや角度が測れる空間と解釈してよいのでしょうか?

**お答え：** そうじゃなかったっけ?

**質問：** 第一基本量は地図上の分度器，ものさしだとおっしゃいましたが，第一基本形式の図形的な意味は何ですか．

**お答え：** 分度器・ものさし，というのが図形的意味．これでご不満なら「図形的意味」という語でどういう説明があったら満足か，おしえてください．

**質問：** 第一基本量と第一基本形式が本質的に同じとおっしゃていましたが，どういうことなのですか，わかりません．

**お答え：** 第一基本量は $E$, $F$, $G$，第一基本形式は $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$．パラメータ表示を指定すれば，持っているデータは同じ．

**質問：** 講義で,「第一基本形式は詭弁だ」と繰り返しておられましたが，なぜですか?

**お答え：** 無理やり（変な記号をつかって）座標変換によらない量，と言い張っているから．もちろんただのたとえ話で，厳密に意味をつけられますが．

**質問：** 解析の授業でも微分形式を習うなど，記号から触れていく機会が増えた気がします．$df$, $du$, $dv$ などはそれ単体で数学的な意味をなす記号なのですか?

**お答え：** はい．厳密な定義をしてもいいですが，いまのところあまり気にしないでいてください．

**質問：** 全微分に出てくる $du$ や $dv$ はどういう意味をもつのですか?

**お答え：** ここでは “座標変換によって然るべきルールで変換される” ただの記号と思うことにします．多様体を習うと「$uv$ 平面の接空間の基底 $\{\partial/\partial u, \partial/\partial v\}$ の双対基底が $\{du, dv\}$」なんて言えるようになるはずです．

**質問：** 授業の最後に単位球面の曲面（山田注：単位球面のことか）について $E$, $F$, $G$ を考えましたが，教科書によると，この場合 $u = 2n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$ （山田注：$n \in \mathbb{Z}$ では?）のときに $uv$ 平面上の曲線の長さと，それに対応する曲面上の曲線の長さが一致するとありました．$u = 2n\pi$ ということは，赤道上でこのようなことが起こるということですが， いまいちイメージがつかめません．. . . どう考えればよいですか．

**お答え：** 計算はやってみましたか? 計算して確かめられることは，ごちゃごちゃ言わずに計算する．イメージはそのあとについてくる．

**質問：** 今回の講義で平面と球面は同相でない，というところをコンパクト性を用いて説明していたのですが，コンパクトの概念を知らないのですが，それ以外の示し方を教えて下さい．

**お答え：** それ以外といえば，ホモロジー群を計算してもよいし，1 点をのぞいた空間の基本群を計算してもよい（より難しい）．まあ，コンパクト性を習ったら思い出して下さい．数学科ならコンパクト性を知らないのは罪．それ以外の学科なら，とりあえず気にしないことにしましょう．気になるなら自分で勉強せよ．

**質問：** 球（山田注：球面のことか？）が 2 つのパラメータで表されないのは，位相が関係するとは，どのように証明するのでしょうか．

**お答え：** 2 つのパラメータで表せない，という言葉の意味が分かりません．球面のパラメータ表示は 2 つのパラメータを使ってませんか? （なんとなく想像がつきますが，書いてないことは読み取りません.）「球」と「球面」の使い分けは講義で説明しませんでしたっけ．

**質問：** 6-4 の「共通部分は連結でない」とはどういうことか．

**お答え：** 言葉どおりの意味です．$\mathbb{R}^2$ の部分集合で “ひとつづきのもの” を連結という．正確には微積分の授業で，多変数関数の微分をならえばやっているはず．やっていなくても教科書に書いてあるはず．

**質問：** メビウスの帯って「トポロジーの玩具」と呼ばれることもあるらしいですね．その理由の 1 つに，おそらく今回の問にあった「向き付け不可能性」があるのかな，と思っています．そのこともあって今回の 6-4 は楽しく解かせていただきました!

**お答え：** そうなの．で質問は?

**質問：** 外微分（原文ママ：外微分のことか）の不変性について 1 年生のころに知りましたが，そのときはあまり意義を感じなかったけど，今回はそれに意義が感じられました．今回は内容の確認で精一杯です．質問はありません．

**お答え：** はい．

**質問：** 特に思いつかないので，理解が不十分なのだと思います．精進します．

**お答え：** はい．

**質問：** 特にないです **お答え：**me, too

# 7 第二基本形式と曲率

## 問題

7-1 曲面のパラメータ表示 $p(u,v)$ の単位法ベクトルを $\nu$, 第一基本量を $E$, $F$, $G$, 第二基本量を $L$, $M$, $N$ とするとき,

$$\begin{aligned} p_{uu} &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)} p_u + \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG-F^2)} p_v + L\nu \\ p_{uv} &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)} p_u + \frac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)} p_v + M\nu \\ p_{vv} &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG-F^2)} p_u + \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG-F^2)} p_v + N\nu \end{aligned}$$

が成り立つことを示しなさい．(ガウスの公式)

ヒント：各 $(u,v)$ において $\{p_u, p_v, \nu\}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底であることと，内積に関する積の微分公式を用いる．

7-2 問題 7-1 の第一式を $v$ で微分したものと，第二式を $u$ で微分したものが等しい，ということを用いてガウス曲率を第一基本量で表す公式

$$\begin{aligned} K = &\frac{E(E_vG_v - 2F_uG_v + G_u^2)}{4(EG-F^2)^2} \\ &+ \frac{F(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v - 2F_uG_u + 4F_uF_v)}{4(EG-F^2)^2} \\ &+ \frac{G(E_uG_u - 2E_uF_v + E_v^2)}{4(EG-F^2)^2} - \frac{E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}}{2(EG-F^2)} \end{aligned}$$

が成り立つことを示しなさい．

7-3 パラメータづけられた曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトルを $\nu$ とするとき,

$$\widehat{III} = \begin{pmatrix} \nu_u \cdot \nu_u & \nu_u \cdot \nu_v \\ \nu_v \cdot \nu_u & \nu_v \cdot \nu_v \end{pmatrix}$$

を第三基本行列，その各成分を第三基本量という．次を示しなさい：

- $\det \widehat{III} = K^2(EG-F^2)$. ただし $K$ はガウス曲率，$E$, $F$, $G$ は第一基本量である．
- $\widehat{III} - 2H\widehat{II} + K\widehat{I} = O$. ただし $H$ は平均曲率，$\widehat{I}$, $\widehat{II}$ はそれぞれ第一基本行列，第二基本行列である．

7-4 テキスト 80 ページ問題 3

7-5 テキスト 80 ページ問題 4 の一葉双曲面

7-6 テキスト 80 ページ問題 7

2013 年 11 月 25 日