2013 年 12 月 2 日 (2013 年 12 月 9 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 8

お知らせ

- 本日，中間試験（12 月 16 日）の予告をいたしました．欠席された方は，web ページより予告の紙をダウンロードし，印刷しておいてください．

授業に関する御意見

- 板書も大事なのですが，先生が口で説明なさっていることもかなり重要だと思うのですが，幾分話すのが早く，メモしきれない時があります．授業時間が短いのもありますが，肝となる部分だけでもどこかに書いていただけると嬉しいです．
  山田のコメント： 申し訳ありません．なるべくそうするよう試みます（字が汚いかも）．
- 先生は授業を「いいかげん」などと自分から言っていますが，いいかげんにしてほしくはありません．
  山田のコメント： なぜですか．
- これからも楽しい授業をお願いします． **山田のコメント：** がんばります．
- とくになしなど 6 件 **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問： 7-1 の問題を解こうとして，$\{p_u, p_v, \nu\}$ を正規直交化して (中略) として，p_{uu}, p_{uv}, p_{vv} をこれらの線形結合で表そうとした（中略）のですが，上手く行きませんでした．これは自分の計算間違いでしょうか？それともアプローチの方針が間違っているのでしょうか．

お答え： たとえば p_{uu} とそれらのベクトルの内積を E, F, G を用いて表すのが少々面倒臭いはずです．この問題のケースでは E, F, G が p_u, p_v の内積で表されていることから，素直に p_u, p_v, ν の線形結合で表すのがよいと思います．

質問： 7-4 は $f(x, y)$ を C^2-関数としたいが，そのことは問題分からわかるのか．

お答え： とくに断らないかぎり C^∞ とする．（曲線のあたりではそう言ったような気がしますね）．

質問： ガウス曲率が一定で回転面でない曲面はありますか．

お答え： たくさんあります． `http://3d-xplormath.org/j/index_ja.html` のトップページにある Breather は，ガウス曲率一定です．

質問： I と II から曲面が唯一定まるとありましたが，問題 7-3 の $\hat{I}\hat{I}I$ にはどのような性質があるのですか．

質問： 第三基本行列，第三基本量を考える意味は何ですか．

質問： 今回 I と II で曲面が回転と平行移動を除いて唯一定まると習ったが，課題の第三基本行列によってさらに何が定まるのでしょうか．

質問： 確か，適合条件下では $\hat{I}$, $\hat{I}I$ から曲面が（合同を除いて）決定されるはずでしたが，問題 7-3 の $\hat{I}\hat{I}I$ はどのように使われるのでしょうか．解き方があっていれば，$\hat{I}\hat{I}I = \hat{I}I\hat{I}^{-1}\hat{I}I$ となって $\hat{I}\hat{I}I$ は $\hat{I}$ と $\hat{I}I$ の積で表すことができるので，$\hat{I}$ と $\hat{I}I$ だけあれば十分のように思えます．

質問： 第一基本形式と第二基本形式から回転と平行移動を除いて曲面が唯一定まるとのことでしたが，第三基本量を考えることによって曲面の何が定まるのでしょうか．

お答え： たしかに第一，第二基本形式で曲面は完全に決定されます．したがって第三基本形式は第一，第二基本形式から定まる（副次的な）量です．ところで，ここで，曲面上の各点 P に対して P における単位法線ベクトル $\nu(\mathrm{P})$ を対応させる対応は，曲面上の各点に単位球面上の点を対応させる写像と見なすことができます．これを曲面の**ガウス写像**と呼ぶことにすると，その挙動を表しているのが第三基本形式です．

質問： Weingarten 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 だけでは一般に曲面は決まらないとのことでしたが，第 1 基本量と第 2 基本量だけでは一般に曲面は決まらないということでしょうか.

お答え： いいえ，第一基本形式，第二基本形式から曲面が決まるということは（結果だけ）講義で申し上げましたよね. 主曲率から決まるとは限らない，ということです.

質問： 第一基本形式と第二基本形式から回転と平行移動を除いて曲面が唯一に定まるというのは，偏微分方程式を解くと曲線（原文ママ：曲面のことですよね）の式が求められるということですか?

お答え： そういうことです.

質問： ガウス曲率や平均曲率といった不変量はどうやって見つけたのでしょうか.

お答え： どうやってでしょうね. 2 世紀も前のことを想像するのは難しいのでは?

質問： 再度，同じ質問で申し訳ありませんが，球面のパラメータ表示について，球面を 2 変数パラメータで表すことができないことは，位相を用いて説明できるとは，どのように証明すればよいのでしょうか. よろしくお願いいたします.

お答え： 示したいことは「球面は $\mathbb{R}^2$ のいかなる領域とも同相ではない」こと（これはよいだろうか）. 実際，球面はコンパクト（$\mathbb{R}^3$ の有界閉集合だから），$\mathbb{R}^2$ の領域はコンパクトになり得ない. 言葉が通じないようなら，位相の最初の部分をひと通り勉強してから思い出してほしい.

質問： $A = \hat{I}^{-1}\hat{I\!I}$ で，もし $\hat{I}$ の逆行列が存在しないとき，A はどうなりますか.

お答え： 正則なパラメータ表示のもと，$\hat{I}$ は正則ですので，そういう心配はいりません. 実際，曲面 $p(u,v)$ に対して $\det \hat{I} = |p_u \times p_v|^2$ となります.

質問： 曲線の例として出てきた $\gamma(t) = (\frac{1}{\cosh t}, t - \tanh t)$ は，接線を引いたとき，（接線と y 軸との交点）と接点とのきょりが一定といっていましたが，これは 1 でいいのですか?

お答え： その通りです.

質問： 曲線も曲面も結局パラメータから決まる量によって分類することができました. 今までの議論は，図形が入っている空間という入れものに微積分ができる構造さえ条件に加えるだけでそのまま引用できる（法線ベクトルとかベクトル積という $\mathbb{R}^3$ 特有の性質を使ってはいますが，それを除けばの話），とおもって，なるほど，このようにして多様体の概念が生まれたのかなと結論しました. 多様体ができたキッカケって，もしかしたらこのようなところから実際に由来しているのでしょうか? 非常に気になります.

お答え： 図形を表現する枠組みを突き詰めていくとそうなるんでしょうね. リーマンの「幾何学の基礎をなす仮説について」は日本語でよめますね.

質問： ガウスの特異の定理（原文ママ；驚異の定理のことか）の系はありませんか. たしかに第一基本量の偏微分で書けるのはすばらしいこととは思うのですが.

お答え： テキスト 99 ページ参照.

質問： 主曲率，Gauß曲率，平均曲率の図形的意味はありますか.

お答え： それを今回.

質問： まだ幾何学などで扱っている図形などを頭でイメージすることが難しいです. そこはやはり量をひたすらこなすしかないのでしょうか. 少し不安を感じています.

お答え： 手書きで絵を書いてごらんなさい. とくに空間図形は切り口や射影を描いてみるのがよいです. また，コンピュータをつかって可視化するのも楽しいです. フリーですと gnuplot などは結構使えると思います.

質問： ガウスを Gauss と表記する場合も多いと思うのですが，やはりドイツ語正書法にのっとって Gauß と書く方が好まれるのでしょうか.

お答え： 文脈依存. 多くの場合 Gauss ですね. 今回は，とくに “ß” の書き方を説明したいためにわざわざこの表記にしてみました.

質問： ガウス枠の $\mathcal{F}$ という記号はドイツ語アルファベットのエフですか?

お答え： いいえ，スクリプト（手書き）体のエフ. ドイツ文字の F は $\mathfrak{F}$.

8 主方向・漸近方向

1 曲面上の曲線 $\gamma(s) = p\bigl(u(s), v(s)\bigr)$ のパラメータ s が弧長であるための条件は

$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1$$

が成り立つことである．ただし E, F, G は p の第一基本量で，$(u,v) = \bigl(u(s), v(s)\bigr)$ で値をとるものとする．

2 弧長 s でパラメータづけられた曲面上の曲線 $\gamma(s) = p\bigl(u(s), v(s)\bigr)$ $(\gamma(0) = \mathrm{P} = p(u_0, v_0))$ の P における速度ベクトルは

$$\gamma'(0) = u'(0)p_u(u_0, v_0) + v'(0)p_v(u_0, v_0)$$

である．

3 弧長 s でパラメータづけられた曲面上の曲線 $\gamma(s) = p\bigl(u(s), v(s)\bigr)$ $(\gamma(0) = \mathrm{P})$ の P における法曲率は

$$\kappa_n = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

である．ただし L, M, N は p の第二基本量で，$(u,v) = \bigl(u(s), v(s)\bigr)$ で値をとるものとする．

4 一般に弧長とは限らないパラメータで表された曲線 $\gamma(t) = p\bigl(u(t), v(t)\bigr)$ $(\gamma(0) = P)$ の P における法曲率は

$$\kappa_n = \frac{L(\dot{u})^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N(\dot{v})^2}{E(\dot{u})^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G(\dot{v})^2}$$

である．

5 P を通る曲面上の曲線の P における法曲率は，曲線の P における速度ベクトルの方向のみによって決まる．

$$\kappa_n(\boldsymbol{v}) = \text{P で速度 } \boldsymbol{v} \text{ をもつ曲線の P における法曲率}$$

6 $\kappa_n(-\boldsymbol{v}) = \kappa_n(\boldsymbol{v})$.

7 $\boldsymbol{v}$ が P における曲面の零でない接ベクトル全体を動くとき，κ_n は最大値，最小値をとり，その値は P における曲面の主曲率と一致する．$\kappa_n(\boldsymbol{v})$ が主曲率と一致するとき $\boldsymbol{v}$ （の方向）を主方向という．

8 曲面 p の P における零でない接ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，点 P を通り，P における曲面の単位法線ベクトル $\nu(\mathrm{P}) = \nu(u_0, v_0)$ と $\boldsymbol{v}$ に平行な平面 $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ をとり，この平面と曲面の交線を，P における速度ベクトルが $\boldsymbol{v}$ であるような $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ 上の曲線 σ とみなす．このとき，$\kappa_n(\boldsymbol{v})$ は σ の P における（平面曲線としての）曲率と一致する．ただし，$\{\boldsymbol{v}, \nu\}$ が $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ の正の基底になるように $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ の向きを定めておく．

9 点 P における曲面のガウス曲率 $K(\mathrm{P})$ が負ならば，$\kappa_n(\boldsymbol{v}) = 0$ となる方向 $\boldsymbol{v}$ が（$\boldsymbol{v}$ と $-\boldsymbol{v}$ は同一視することにすれば）ちょうど 2 つ存在する（漸近方向）．

10 点 P におけるガウス曲率が負であるとき，曲面の接平面と曲面との共通部分（と P の十分小さい近傍の共通部分）は P で交わる 2 つの曲線となる．これらの曲線の P における接ベクトルは漸近方向をあたえる．

11 P におけるガウス曲率が負であるとき，ふたつの漸近方向は，主方向で 2 等分される．

2013 年 12 月 2 日 (2013 年 12 月 9 日訂正)

問題

8-1 $S=\{(x,y,z)\,|\,x^6+y^6+z^6-1=0\}$ は滑らかな曲面であることを示し，S 上の点 (a,b,c) におけるガウス曲率を (a,b,c) で表せ．（ヒント：$P=(a,b,c)\in S$ が $c\neq 0$ を満たすならば P の近傍で S は $z=f(x,y)$ とグラフ表示される（陰関数定理）．f の形を具体的に求めなくても陰関数の微分公式から f の微分を求めることができるので曲率を計算することができる．$c=0$ のところではどうすればよいか）

8-2 ガウス曲率が -1 であるような回転面をすべて求め，その絵を描きなさい．（テキスト 79 ページ参照．擬球面が全てではない）

8-3 曲面 $p(u,v)$ 上の曲線 $\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ の各点 $\gamma(t)$ が臍点でなく，その点における速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ が主方向をあたえているとき，$\gamma(t)$ （あるいは，uv 平面上の曲線 $\bigl(u(t),v(t)\bigr)$）を曲率線という．$\gamma(t)$ が曲率線であるとき，

$$q(t,s):=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)+s\nu\bigl(u(t),v(t)\bigr)$$

であたえられる曲面のガウス曲率を求めなさい．ただし $\nu(u,v)$ は曲面 p の単位法線ベクトル場である．

8-4 曲面のパラメータ表示 $p(u,v)$ において u 曲線，v 曲線が曲率線であるとき，(u,v) を曲率線座標曲率線座標のもとでは第一基本行列と第二基本行列が共に対角行列であることを示しなさい．

8-5 曲面 $p(u,v)$ 上の曲線 $\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ の各点 $\gamma(t)$ における速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ が漸近方向をあたえているとき，$\gamma(t)$ （あるいは，uv 平面上の曲線 $\bigl(u(t),v(t)\bigr)$）を漸近曲線という．とくに u 曲線，v 曲線が漸近曲線であるとき，(u,v) を漸近線座標とよぶ．漸近線座標のもとで，第二基本量は $L=0$, $N=0$, $M\neq 0$ （したがって，漸近線座標が存在すれば自動的にガウス曲率は負）となることを示しなさい．

8-6 一葉双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ の曲率線座標と漸近線座標を求めなさい．