曲面に関する補足

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論@東京工業大学・理学部数学科

2013 年 12 月 09 日

驚異の定理

定理 (Gauß; 1827)
曲面のガウス曲率は第一基本量で表すことができる．

- 具体的な表示はテキスト 99 ページ（式 (10.8)）
- 第一基本量 "⇔" 曲面上の長さ（テキスト 68 ページ）

- 平面のガウス曲率は 0 である．
- 半径 r の球面のガウス曲率は $1/r^2$ である．

系 (驚異の定理の系)
正確な地図は作れない．

- テキスト付録 B-3 (184 ページ)

第一基本形式の幾何

- 第一基本形式から定まる量を**内的** intrinsic という．
- 距離を保つ曲面の変形は，内的な量を保つ．

事実
ガウス曲率は内的な不変量である．

定義 (リーマン計量)
$\mathbf{R}^2$ の領域 D 上の "対称 2 次形式"

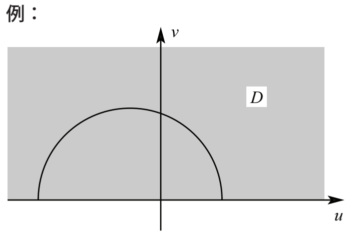
$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \qquad \left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} > 0\right)$$

を D 上の**リーマン計量**とよぶ．

リーマン多様体

- 領域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上にリーマン計量 ds^2 があればガウス曲率が定義できる．

例：



$$D = \{(u,v) \mid v > 0\}$$
$$ds^2 = \frac{1}{v^2}(du^2 + dv^2)$$
$$K = -1$$

- 双曲平面（テキスト 104 ページ）：
  非ユークリッド幾何学のモデル

曲面論の基本定理

定理
$\mathbf{R}^2$ の単連結領域 D 上で定義された 2 つの対称形式

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \qquad \text{(正値)}$$
$$I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 \qquad \text{が}$$

- ガウス方程式（テキスト 99 ページ，(10.8) 式）
- コダッチ方程式（特別な座標でテキスト 148 ページ，定理 15.2）をみたすならば，

曲面 $p\colon D \to \mathbf{R}^3$ で，ds^2，$I\!I$ を第一・第二基本形式とするものが回転と平行移動を除いて唯一存在する．

- 第一基本形式・第二基本形式が曲面の形を決める

曲面の変形

ガウス曲率と平均曲率（主曲率）では曲面の形が決まるとは限らない．

- ガウス曲率 K が正であるような閉曲面は第一基本形式を保って変形できない（Cohn-Vossen の剛性定理）
- 平均曲率 H が一定である曲面は，第一基本形式と主曲率を保つ非自明な変形を持つ（Bonnet）

極小曲面の等長変形
http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/users/urabe/deform/Deformation.html
（卜部東介数学博物館；Tosuke Urabe, 1953–2011）

面積最小の曲面

- 平均曲率が恒等的に 0 である曲面を**極小曲面**という．

事実
与えられた境界をもつ曲面のうち，最小の面積をもつものは極小曲面である．

- 石鹸膜の形は極小曲面を与える
- 変分公式（$H = 0$ は面積汎関数の Euler-Lagrange 方程式）
- 安定性
- ワイエルストラス表現公式 . . .

極小曲面の例

$$p(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) \quad \text{カテノイド（懸垂面）}$$
$$q(u,v) = (u \cos v, u \sin v, v) \quad \text{ヘリコイド（常螺線面）}$$

- GANG Gallery of minimal surfaces:
  http://www.gang.umass.edu/gallery/min/
- Virtual Math Museum (3D-Xplor-Math):
  http://virtualmathmuseum.org/Surface/gallery_m.html

平均曲率一定の曲面

事実

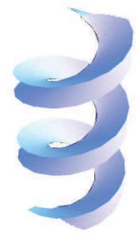
囲む領域の体積が一定という条件のもと，面積が最小になる閉曲面の平均曲率は一定である．

- シャボン玉の形は平均曲率一定曲面を与える
- Hopf の問題 (Hopf-Alexandrov-Wente-Kapouleas...)
  テキスト 155 ページ
- テキスト付録 B-6

- GANG Gallery of CMC surfaces:
  http://www.gang.umass.edu/gallery/cmc/

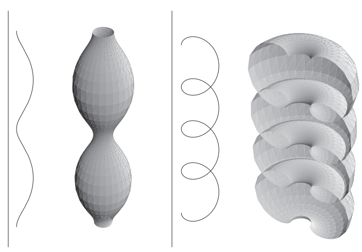
平坦な曲面

- ガウス曲率 K が 0 である曲面を平坦な曲面という．
  可点面，テキスト付録 B-4; 189 ページ
- 完備な平坦曲面は柱面に限る（Hartmann-Nirenberg, 1959）



平均曲率一定回転面

Delaunay surfaes (1841)

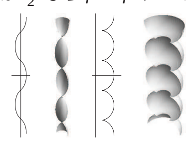


unduloid　　nodoid

テキスト 203 ページ

$K=1$ の曲面

- テキスト 77 ページ（回転面）
- 平均曲率一定曲面の平行曲面（テキスト付録 B-6）
  曲面 p の平均曲率が $\frac{1}{2}$ なら $\tilde{p}=p+\nu$ のガウス曲率は 1



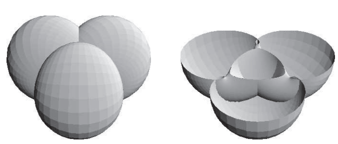
- Virtual Math Museum (3D-Xplor-Math):
  http://virtualmathmuseum.org/Surface/gallery_o.html

平均曲率一定トーラス

「しゃぼん玉は丸い」

Fact

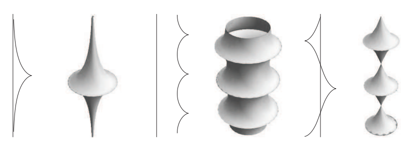
- 平均曲率一定の自己交叉をもたない閉曲面は球面である *(A. D. Alexandrov, 1958)*
- 球面と同相な平均曲率一定曲面は球面である *(H. Hopf, 1956)*



Wente Torus (1984)

$K=-1$ の曲面

- 双曲平面は $\mathbf{R}^3$ の曲面として実現できない（Hilbert）
- GANG
  http://www.gang.umass.edu/gallery/k/
- Virtual Math Museum (3D-Xplor-Math):
  http://virtualmathmuseum.org/Surface/gallery_o.html



Beltrami, 1868

ガウス曲率一定曲面の展開

- 曲面を k 倍に相似拡大すればガウス曲率は $1/k^2$ 倍になる．
  $\Rightarrow$ 定ガウス曲率曲面は，$K=1,-1,0$ のみを考えればよい．

事実

- ガウス曲率 $K=0$ の曲面の各点の近傍は，第一基本形式を保って平面に移すことができる（正確な地図が作れる）（テキスト 140 ページ，補題 14.2）
- ガウス曲率 $K=1$ の曲面の各点の近傍は，第一基本形式を保って単位球面に移すことができる．
- ガウス曲率 $K=-1$ の曲面の各点の近傍は，第一基本形式（リーマン計量）を保って双曲平面に移すことができる．

$K=-1$ の曲面

Kuen

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2\cosh v(\cos u + u\sin u)}{\cosh^2 v + u^2} \\ \dfrac{2\cosh v(\sin u - u\cos u)}{\cosh^2 v + u^2} \\ v - \dfrac{2\sinh v\cosh v}{\cosh^2 v + u^2} \end{pmatrix}$$