

2013 年 12 月 9 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 9

お知らせ

- 次回 12 月 16 日は中間試験, 23 日はその返却と解説に充てます.
- 今回は提出物の受付をいたしません.

前回までの訂正

- 講義資料 8, 4 ページ, 問題 8-3, 8-4: 曲率線の定義が重複していました. 8-4 の定義を採用します.

授業に関する御意見

- 教科書との対応をもう少し詳しく書いてほしいです. いま何ページであるかなど.
山田のコメント: Sorry. できればまなく読んでもらうとわかる(ということがとても勉強になります).
- 授業内に問と解説を入れて具体例を示して欲しい(この曲面の点 P の曲率を求めよなど)
山田のコメント: 中学校みたいに? まず, 自分で手探りでやってみよ. 大学二年生くらいになったらそれがあたりまえ. 人がやったことを写しても力にならない.
- もう少し板書の字を大きくして頂けると助かります(後ろの席だととても見にくいときがあります.) 山田のコメント: Sorry.
- 特になし/今回は特にはないです. 山田のコメント: me, too.

質問と回答

質問: 今回 Gauß 曲率については 1 年の線形代数での(山田注: 微積分では?) 極値問題の関係などあるていど分かったのですが, 平均曲率は何を表しているのでしょうか?

お答え: 今回少し説明します.

質問: 今日の講義(原文ママ: 講義のことか? 最初の講義で指摘したはずだが)からガウス曲率は 2 変数関数 $z = f(x, y)$ の極値の概念の拡張という考えでいいのでしょうか.

お答え: “極値の概念” というのは具体的に何でしょうか. “極値” ならわかるんですが, “の概念” という語がついたとたんに意味が曖昧になります. 具体的に何を想像しているのかをきちんと書いてご覧下さい(「概念」とか「考え」などの抽象的な言葉をつかうと, 何か言っている感じがして格好いいですが, 内容がない場合が多いと思います. もちろん, 具体的に書くほうがずっと難しい. そして, 皆さんには難しいことにチャレンジしてもらいたい.)

質問: 問題 8-1 で, 陰関数の微分公式を用いたとき, $x^6 + y^6 + z^6 - 1 = 0$ を $f = \dots$ の式に変形して普通に偏微分したときでは何が異なるのでしょうか.

お答え: 計算のしかたが異なる. しいて言えば(両方やってみればすぐにわかるが) 冪乗根を開く場合の場合分けが, 陰関数の場合は不要.

質問: 8-1 を「曲面」というのは, この授業の定義と反しているような気がします. 一枚の cover で覆えていたら曲面とよぶのではなかったのですか?

お答え: いいえ. 曲面はちゃんと定義していません. “陰関数ながめらかな曲面を表す条件” は与えましたね.

質問: ここ最近 $S_n = \{(x, y, z) \in K \mid x^n + y^n + z^n = 1\}$ ($K = \mathbb{R}$ or \mathbb{C}) の集合を調べる問題をよく見るのですが, 何か深いある研究のつながりがあるんですか.

お答え: この科目では単なる例.

質問： 8-2 を解いてみて、どのような時に犬跡線になるかまでは何とか出来ましたが、それ以外を見つけることができませんでした。どのような方針、もしくは作業をするべきだったのでしょうか。対象が広く感じてしまい、手が出せなかったです。

お答え： そんなに広くありません。テキスト §8 の回転面の、正の曲率の場合の真似をすればよいだけ。

質問： 8-3, 8-4 の $\dot{\gamma}(t)$ が主方向を与えるとは、主方向の 1 つを与えていて、もうひとつは直交するベクトルであるというとらえ方で合っているでしょうか。

お答え： はい。

質問： ガウス曲率 $K < 0$ のとき、漸近方向は 2 方向ありましたが、 $K = 0$ のときはどうなるのでしょうか。

お答え： 臍点でなければ一方。法曲率の最大値 λ_1 と最小値 λ_2 のうち一方は 0 ($K = \lambda_1 \lambda_2 = 0$) で、一方は 0 でないことからわかる。

質問： 曲率線座標と漸近線座標が一致することはあるのでしょうか。

お答え： ありません。漸近線座標が存在するのは $K < 0$ のとき。このとき、主曲率 λ_1, λ_2 はともに 0 でなく、異なる符号をもっている。したがって、主方向の法曲率は 0 でないが、漸近方向の法曲率は定義から 0。

質問： 曲面上の点 P を通る曲線の法曲率は、曲面に直交する平面で切った切り口の曲率とありますが、点 P の法線と曲線の点 P による接線の 2 つを含む平面で切ることですか。

お答え： そういうことです。

質問： 主曲率のみでは曲面が決まらない原因がよく分かりません。「どの時点で曲面の形が凸か鞍か」さえわかっているなら曲面が決まりそうですが、この直感はどこまで正しいでしょうか？

お答え： 全然正しくありません。実際、凸かどうかだけでは曲面の形は決まりません。球面も回転放物面もすべての点で“凸”ですが合同ではありません。すなわち、定性的な「どの時点で曲面の形が凸か鞍か」という大雑把すぎる尺度では図形は決まりません。もうすこし：主曲率の値という定量的な尺度でもうまくいかない、という例を今回あげます。

質問： 中間試験はどのくらいの難易度ですか？教科書の問いがとけるくらいであるとか、毎回のレポート問題がだいたいは解けなければならないレベルであるとか。あとは中間の配分はどのくらいですか？まだあまり決まってませんか？範囲としては授業で扱ったものということでしたが、教科書で飛ばしたページは扱わないということですか？

お答え： 前半：山田は易しいと思う。中盤：10月7日の講義資料に書いてあるし、そのときに説明した。後半：一応、講義内容に準拠しています。具体的な計算を省略した（キューピー三分クッキング方式）ところは、もちろん範囲です。

質問： 中間試験の難易度は、提出問題と同程度ですか。また証明なしに使って良い事実がどこまで分かる範囲で知りたいです。（例えば $z = f(x, y)$ のガウス曲率など）

お答え： 前半：ずっと易しいです（と山田は思っています）。後半：問題を読めば（まともな読解力があれば）わかるようにしています。

9 補足

9.1 驚異の定理

9.2 曲面論の基本定理

9.3 極小曲面・定平均曲率曲面

9.4 定ガウス曲率曲面