

幾何学概論 中間試験 [問題 1]

注意事項

- 解答は、解答用紙の所定の欄に、採点者が読みとり、理解できるように書いてください。
- 計算や下書きには余白や裏面を使用してください(採点の対象とはしません)。
- 試験終了後は、解答用紙と持込用紙を回収します。持込用紙には学生番号と氏名を記してください。問題は持ち帰っていただいて結構です。
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません。問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し、正しいと思われる問題に直して解答してください。
- 答えは 12 月 23 日の授業の際に返却いたします。
- 採点に関する質問・クレームなどは 2014 年 1 月 6 日授業終了後までに山田までお申し出ください。上記期日以降のクレームは、たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません。ご了承下さい。また、返却答案を受け取らない方はクレームをつける権利がありません。

指定用紙のみ持込可

参考：双曲線関数の性質

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x, \quad \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x, \quad \frac{d}{dx} \tanh x = 1 - \tanh^2 x.$$

問題 A [80 点] 正の定数 a, b が $a^2 + b^2 = 1$ を満たしているとき、 \mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^3 への写像 p を

(*) $p: \mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto$

$$p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \left(\frac{a \cos u}{\cosh v}, \frac{a \sin u}{\cosh v}, a(v - \tanh v) + bu \right) \in \mathbb{R}^3$$

で定義する。次の文中の [1] ~ [14] に最もよく充てはまる数・式を入れ、後の問題 a に答えなさい。

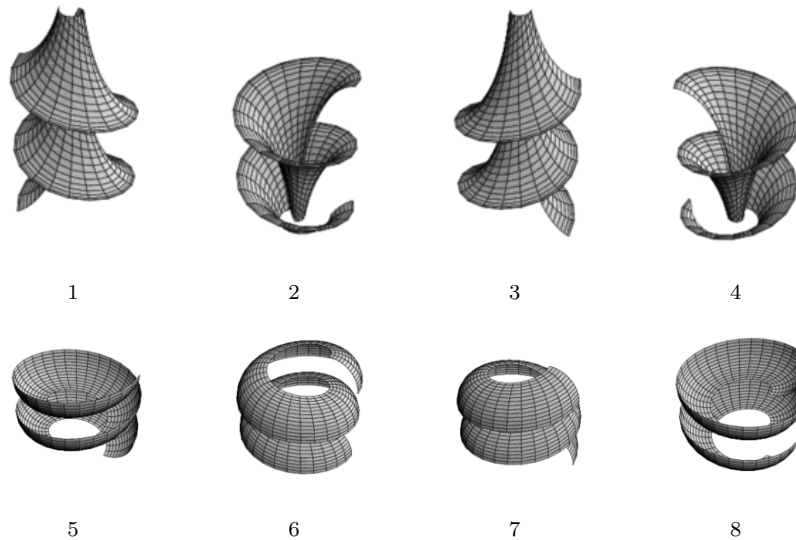
- $\gamma(t) = p(t, 0)$ は空間曲線の助変数表示を与える。この曲線の曲率は [1] , 捩率は [2] である。
- $\sigma(t) = (x(0, t), z(0, t))$ と定めると、 σ は $t =$ [3] に特異点をもつ、平面曲線のパラメータ表示である。 $t >$ [3] の範囲で $\sigma(t)$ を弧長パラメータ s で表示しなおすと $\sigma(s) =$ [4] (テキストに従って同じ σ という記号を用いる) となる。とくに、曲線 σ の曲率は $\kappa(s) =$ [5] と弧長 s の式で表されるが、もとのパラメータ t の式で表せば $\kappa(t) =$ [6] となる。この曲線を xz 平面上の曲線とみなし、点 $P = \sigma(t_0)$ における曲線の接線と z 軸との交点を Q とするとき、 P と Q の距離は [7] である。
- 式 (*) の p は \mathbb{R}^2 全体で定義された微分可能な写像である。ここで、 $\{p_u(u, v), p_v(u, v)\}$ が一次従属であるような \mathbb{R}^2 の点全体の集合は [8] である。したがって \mathbb{R}^2 の領域 $D =$ [9] 上では p は正則性の条件を満たす、すなわち曲面のパラメータ表示を与える (D の選びかたは複数ある可能性があるが、その中で $(1, 1)$ を含む最大のもを選ぶこと)。とくに p の単位法線ベクトルは $\nu =$ [10] , 第一基本形式は $ds^2 =$ [11] , 第二基本形式は $II =$ [12] となるので、この曲面のガウス曲率は [13] , 平均曲率は [14] である。

問題 a は裏面。

幾何学概論 中間試験 [問題 2]

問題 A (続き)

問題 a p による領域 D の像は, 下の図のどれにあたるか. 理由を付けて答えなさい. ただし, 座標系は z 軸を鉛直方向にとった右手系である.



問題 B [20点] 弧長 s をパラメータとする平面曲線 $\gamma(s)$ ($-\infty < s < +\infty$) の曲率 $\kappa(s)$ が周期 L をもつ周期関数であるとき次の問いに答えなさい.

- (1) 曲線論の基本定理を用いて, 行列 $A \in \text{SO}(2)$ と $b \in \mathbb{R}^2$ で次を満たすようなものが存在することを示しなさい:

$$\gamma(s+L) = A\gamma(s) + b \quad \text{が任意の } s \in \mathbb{R} \text{ に対して成り立つ.}$$

ただし, $\text{SO}(2)$ は行列式が $+1$ の 2 次直交行列全体の集合, $\gamma(s)$, b は 2 次の列ベクトルとみなしている.

- (2) さらに $\gamma(0) = (0, 0)$, $\gamma'(0) = (1, 0)$ とするとき, (1) の A , b を κ を用いて表しなさい.

問題 C [20点] 「曲面のガウス曲率の定義がパラメータのとりかたによらない」とはどういうことかを命題の形で述べ, 証明を付けなさい.

問題 A の解答欄 各5点 幾何学概論 中間試験 [解答用紙 1]

1 a	2 b	$a^2 + b^2 = 1$ に注意
3 0	4 $(ae^{-s/a}, a \{ \log(e^{s/a} + \sqrt{e^{2s/a} - 1}) - \sqrt{1 - e^{-2s/a}} \})$	
5 $-\frac{1}{a\sqrt{e^{2s/a} - 1}}$	6 $-\frac{1}{a \sinh t}$	7 a
8 $\{(u, v) \mid v = 0\}$		9 $\{(u, v) \mid v > 0\}$ <small>$\{(u, v) \mid v > 0\}$ は領域ではない</small>
10 $\frac{1}{\cosh v} (a \cos u \sinh v + b \sin u \cosh v, a \sin u \sinh v - b \cos u \cosh v, a)$		
11 $(1 - a^2 \tanh^2 v) du^2 + 2ab \tanh^2 v du dv + a^2 \tanh^2 v dv^2$		
12 $\frac{\tanh v}{\cosh v} (-a^2 du^2 + 2ab du dv + a^2 dv^2)$		
13 -1	14 $\frac{1 - \sinh^2 v}{2 \sinh v}$	

問題 a ← 正解の番号を記入 [番号 5点, 理由 5点]

ガウス曲率は負であるから, 5 番以降は不適当.
 また, 曲線 $\sigma(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で z 軸の正の部分に近づくから, 2, 4 は不適当.
 一方, 曲線 $\gamma(t)$ はつるまき線で, 曲率, 捩率ともに正だから, xy 平面上で反時計回りに回転しながら上にあがっていく. すなわち 3 のような形になっているはず.

学籍番号	氏名
------	----

幾何学概論 中間試験 [解答用紙 2]

問題 B の解答欄 各 10 点

(1)

$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(s + L)$ の曲率関数は $\kappa(s + L)$ であるが, κ の周期性より, これは $\kappa(s)$ に一致する. すなわち γ と $\tilde{\gamma}$ は同じ曲率関数をもつ曲線だから, 曲線論の基本定理の一意性の部分から

$$\tilde{\gamma}(s) = A\gamma(s) + b$$

を満たす $A \in \text{SO}(2)$ と $b \in \mathbb{R}^2$ が存在する.

計算スペース

学籍番号	氏名
------	----

幾何学概論 中間試験 [解答用紙 3]

問題 B の解答欄 (つづき)

(2)

条件を満たす γ は

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) = \left(\int_0^s \cos \theta(u) du, \int_0^s \sin \theta(u) du \right) \quad \theta(u) = \int_0^u \kappa(t) dt$$

と書ける . ここで ,

$$\begin{aligned} \theta(u+L) &= \int_0^{u+L} \kappa(t) dt = \int_0^L \kappa(t) dt + \int_L^{u+L} \kappa(t) dt = \int_0^L \kappa(t) dt + \int_0^u \kappa(t+L) dt \\ &= \int_0^L \kappa(t) dt + \int_0^u \kappa(t) dt = \theta(L) + \theta(u) \end{aligned}$$

が成り立つ .

いま $\alpha := \theta(L)$ とおくと ,

$$\begin{aligned} x(s+L) &= \int_0^{s+L} \cos \theta(u) du = \int_0^L \cos \theta(u) du + \int_L^{s+L} \cos \theta(u) du \\ &= \int_0^L \cos \theta(u) du + \int_0^s \cos \theta(u+L) du = \int_0^L \cos \theta(u) du + \int_0^s \cos(\theta(u) + \alpha) du \\ &= \int_0^L \cos \theta(u) du + \int_0^s (\cos \alpha \cos \theta(u) - \sin \alpha \sin \theta(u)) du \\ &= b_1 + \cos \alpha x(s) - \sin \alpha y(s), \\ y(s+L) &= b_2 + \sin \alpha x(s) + \cos \alpha y(s) \end{aligned}$$

となる . ただし

$$b_1 = \int_0^L \cos \theta(u) du, \quad b_2 = \int_0^L \sin \theta(u) du$$

とおいた . したがって

$$\gamma(s+L) = A\gamma(s) + \mathbf{b},$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = \theta(L), \quad \mathbf{b} = \int_0^L (\cos \theta(u), \sin \theta(u)) du, \quad \theta(u) = \int_0^u \kappa(t) dt$$

と書ける .

学籍番号

氏名

幾何学概論 中間試験 [解答用紙 4]

問題 C の解答欄 命題 10 点 ; 証明 10 点

曲面のパラメータ表示 $\tilde{p}(\xi, \eta)$ は, 別の曲面のパラメータ表示 $p(u, v)$ からパラメータ変換

$$(\xi, \eta) \mapsto (u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$$

で得られるものとする. このとき, \tilde{p} のガウス曲率 \tilde{K} と p のガウス曲率 K は一致する. すなわち

$$\tilde{K}(\xi, \eta) = K(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$$

が成り立つ.

証明

$p(\tilde{p})$ の単位法線ベクトルを $\nu(\tilde{\nu})$, とすると

$$\tilde{\nu}(\xi, \eta) = \pm \nu(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$$

が成り立つ. ただし \pm はパラメータ変換のヤコビアン^tの符号である.

また $p(\tilde{p})$ の第一基本量を E, F, G ($\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$) とおくと $\tilde{p}_\xi = u_\xi p_u + v_\xi p_v$, $\tilde{p}_\eta = u_\eta p_u + v_\eta p_v$ なので

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\xi & v_\xi \\ u_\eta & v_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} = {}^t J \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J \quad \left(J = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \right)$$

が成り立つ.

さらに $p(\tilde{p})$ の第二基本量を L, M, N ($\tilde{L}, \tilde{M}, \tilde{N}$) とおくと, $\pm \tilde{\nu}_\xi = u_\xi \nu_u + v_\xi \nu_v$, $\pm \tilde{\nu}_\eta = u_\eta \nu_u + v_\eta \nu_v$ なので

$$\begin{pmatrix} \tilde{L} & \tilde{M} \\ \tilde{M} & \tilde{N} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} u_\xi & v_\xi \\ u_\eta & v_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} = \pm {}^t J \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} J$$

となる. したがって, p, \tilde{p} のワインガルテン行列をそれぞれ A, \tilde{A} とすれば

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{L} & \tilde{M} \\ \tilde{M} & \tilde{N} \end{pmatrix} = \pm J^{-1} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \pm J^{-1} A J$$

となる. したがって,

$$\tilde{K} = \det \tilde{A} = \det A = K$$

を得る.

学籍番号	氏名
------	----

幾何学概論 中間試験〔解答用紙 5〕

この用紙には、問題 D への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません。

問題 D [0点] この科目の授業、教材、試験などについて、御意見、ご希望、誹謗、中傷など、なんでもご自由にお書きください。なお、この問いへの回答は成績に一切影響しません。

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります。ご自分の学籍番号の座席に着席してください。

試験開始： 次の条件が満たされれば、解答用紙・問題用紙を配布します。

- 受験者が着席していること。
- 各受験者が、筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティッシュペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞆に入れ、机の下か足元に置いていること。
- 私語がないこと。

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は1枚両面、解答用紙は5枚（この紙を含む）です。

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください。
- 解答用紙5枚（この紙を含む）と持ち込み用紙はすべて提出してください。持ち込み用紙を持参しなかった方は提出しなくて結構ですが、解答用紙が5枚揃っていない答案は採点いたしません。
- 解答は所定のスペースに記入してください。欄外や裏面は採点の対象にしません。
- 問題用紙は提出せず、お持ち帰りください。

試験終了・回収： 指示に従わない場合、不正行為とみなすことがあります。

- 終了の合図がありましたら、筆記用具をおいてください。
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい。私語は禁止。
- 答案は、上から、解答用紙1, 解答用紙2, 解答用紙3, 解答用紙4, 解答用紙5, 持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください。
- 解答用紙を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左、最左端の壁際まで送ります。その際、自分の答案用紙を、受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい。
- 教室最左端の席の方は、答案用紙の束を机の上おき、回収を待ってください。試験監督が回収を行います。
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です。

学籍番号	氏名
------	----