

2014年1月6日

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

## 幾何学概論講義資料 11

### お知らせ

- 【協力をお願い】例年お手数をおかけしております「授業評価」ですが、今学期より web 上で行うこととなりました。お手数をおかけして申し訳ありませんが「東工大ポータル」に入って「授業評価 Course Evaluation」のページよりご回答お願いいたします。
- 中間試験の答えは数学事務室にて返却しております。

### 前回までの訂正

- 12月9日のハンドアウト, 6ページ目:  
平均曲率  $H$  が一定である曲面は, 第一基本形式と第二基本形式を保つ変形を持つ (Bonnet)  
⇒ 平均曲率  $H$  が一定である曲面は, 第一基本形式と主曲率を保つ非自明な変形を持つ (Bonnet)

大きな間違いを書いてしまいました。勢いとは恐ろしい。申し訳ありませんが訂正願います。

### 授業に関する御意見

中間試験の問題 D への回答です:

- 平面 山田のコメント: ですか?
- 計算が大変だった。 山田のコメント: ですね。
- 毎回配布された問題について簡単な解答やヒントがほしいです。  
山田のコメント: 講義でいくつか説明しましたね。これは ok? それ以外は質問用紙があるじゃないですか。どこまで考えてどこで詰まったかを質問していただければお答えできます。口を開けて餌が来るのを待っていてはだめ。

## 11 測地線

- 測地線の方程式，クリストッフェルの記号．
- 測地三角形とガウス・ボンネの定理．

### 問題

11-1  $uv$  平面上の領域  $U$  で定義された曲面のパラメータ表示  $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  が与えられている．いま， $uv$  平面上の曲線  $\gamma(s)$  ( $s \in [0, L]$ ) に対応する曲面上の曲線  $\tilde{\gamma}(s) = p \circ \gamma(s)$  が弧長  $s$  でパラメータづけられているとする．このとき， $\{\gamma_w\}$  を  $U$  上の曲線の族で，

- $F(s, w) = \gamma_w(s)$  は  $[0, L] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  上で定義された  $U$  への滑らかな写像．
- $\gamma_0 = \gamma$ ,

となるもの ( $\gamma$  の変分) に対して  $\tilde{\gamma}_w = p \circ \gamma_w$  の長さを  $L_w$  とすれば，

$$\left. \frac{d}{dw} \right|_{w=0} L_w = [\tilde{\gamma}'(s) \cdot V(s)]_{s=0}^{s=L} - \int_0^L \tilde{\gamma}''(s) \cdot V(s) ds, \quad V(s) = \left. \frac{\partial \tilde{\gamma}_w(s)}{\partial w} \right|_{w=0}$$

が成り立つことを示しなさい．

11-2 ガウス曲率が負であるような曲面上の 2 点  $P, Q$  をとおる測地線が 2 本あるとする．このとき，この 2 つの測地線分は円板と同相な領域を囲まないことを示しなさい．

11-3 測地的極座標の存在を認めて，テキスト 117 ページ一番下の「定理」の証明を完全にしなさい．

11-4 テキスト 106 ページ，演習問題 10-6