2014 年 1 月 16 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 12

お知らせ

- 今回は，都合により提出物の受付を中止させていただきます．

前回までの訂正

- 講義資料 11，演習問題に次を追加：
  問題 11-A: テキスト 105 ページ，問題 2.
  問題 11-B: 球面の小円は測地線でないことを確かめなさい．

授業に関する御意見

- 「$\mathbb{R}^2$ の 2 点を結ぶ最短線は線分である」ことの証明は今まで考えたことがなかったのでおもしろかったです．
  山田のコメント： そう？ だれでも考えているのかと思いました．
- 期末試験についての希望です．計算用紙が欲しいです． **山田のコメント：** 裏面は使いました？
- 問題は 11-B 位のむずかしさでお願いします． **山田のコメント：** なんで？
- 今回のクリストッフェル記号が天下り的に出てきたのですが，それが何故そうなるのかの補足やあるいは詳しく書いてある文献など教えていただきたいです． **山田のコメント：** テキスト 107 ページ．
- たまにクリストッフェルの記号 Γ と P が文字の形が似てしまっていて見づらい部分があったので，丁寧にかいていただけるとうれしいです． **山田のコメント：** 失礼しました．
- 特にありません． **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問： 11-A の問題で，つるまき線は最短線になるとは限らないがそれでよいのか．測地線が最短線になるとは限らないということですか． **お答え：** その通り．最短線は測地線だが一般に逆は正しくない．

質問： 11-A について，この解答のように $u = as + b$ と表したとき，$a = 0$ だと $\gamma(s)$ は円になってしまうと思うのですが，この場合は円もつるまき線の一種として考えてよいのですか？ **お答え：** どうしましょう．テキストの定義では $b = 0$ の場合もつるまき線に入れているようですが，そうしないのも手かも知れません．

質問： 2 点を結ぶ最短線はパラメータをとりかえれば測地線になっている．このパラメータは弧長パラメータのことですか． **お答え：** 弧長に比例するパラメータです．速さ一定の運動でもいろいろな速さを持ちえますよね．

質問： 2 点を結ぶ最短線でない測地線はありますか？ **お答え：** 例えば大円の長い方の弧．

質問： 球面での測地線は大円のみであるというのは飛行機の大圏航路と同じことなのでしょうか．

お答え： はい．大圏航路は測地線に沿った航路です．

質問： ガウス曲率が恒等的に 0 である可展面において，測地線は展開図上で直線（線分）になっているのでしょうか．

お答え： そうです．測地線は第一基本形式のみによる概念ですので，第一基本形式が共通なら測地線も共通です．

質問： “無限に続く曲線のうちあらゆる方向に平行移動させてももとの曲線と交点を持たない” というのを直線の性質とみるのはどうでしょうか． **お答え：** おしいですね．直線に沿う平行移動があるので...

質問： 今回教えていただいた 3 つ以外に直線を定義する方法はありますか．

お答え： クラスメイトで考えて見た人はいるみたいですね．

質問： 測地線が直線に相当するというのがなぜそうなるのかよくわかりません．線分 AB : $\{\mathrm{P} | d(\mathrm{A},\mathrm{P}) + d(\mathrm{P},\mathrm{B}) = d(\mathrm{A},\mathrm{B})\}$ の定義から “直線” を定めると距離の定義や曲面の値によっては線分 AB が空集合になったりするよう

なきがするのですが，どうなんですか．

お答え： 「相当する」というのは「ある性質」を継承しているということと理解して下さい．すべての性質を継承しているとは限りません．

質問： 束縛力というのが自分の理解の中であいまいだったのですが，地球が球体だとすると，質点が運動するときの速度ベクトルは接線方向を向いていて，地球外に飛び出す方向だが，それを重力が押さえている．このとき重力は法線方向を向いていてこの重力が束縛力ということでよいのですか?

お答え： 重力そのものではないのです．加速度（力に比例する；面倒くさいので比例定数は 1 にしよう）のうち曲面の法線方向の成分を「束縛力」とみなします．球面上のいろいろな運動を考えるといろいろな加速度をもつでしょうから，一様に重力が束縛力というわけではないです．

質問： $\frac{d}{dw}\Big|_{w=0} L_w$ と $\frac{dL_w}{dw}\Big|_{w=0}$ の違いはありますか． **お答え：**ありません．

質問： uv 平面上で，ある関数がある点 (u_0, v_0) で最大値をとったとき，$p(u,v)$ という正則にパラメータづけられた曲面では $p(u_0, v_0)$ で最大値をとりますか?

お答え： 曲面上の関数をどのように考えるべきかということでは? 曲面がパラメータ表示されているなら，地図 (uv 平面) 上の関数と曲面上の関数を同一視するのが自然でしょう．そう思えば，質問の答は自明．

質問： 今回は特にないです． **お答え：**me, too.

12 測地線の最短性

■測地線と最短性

定理 12.1 (テキスト 92 ページ，定理 10.5)**.** 曲面 $p(u,v)$ 上の点 P, Q を結ぶ，曲面上のなめらかな最短線が存在すれば，その弧長パラメータによる表示は測地線である．

- 最短線を $\gamma(s)$ $(0 \leqq s \leqq l)$ と弧長パラメータ表示しておく．ただし $\gamma(0) = \mathrm{P}$, $\gamma(l) = \mathrm{Q}$.
- 次の集合を考える：

$$\mathcal{C} := \{\sigma\colon [0,l] \to \mathbb{R}^3 \,|\, \sigma \text{ は曲面 } p(u,v) \text{ 上の曲線で } \sigma(0) = \mathrm{P},\, \sigma(l) = \mathrm{Q}\}$$

- 集合 $\mathcal{C}$ で定義された次の関数を考える：

$$\mathcal{L}\colon \mathcal{C} \ni \sigma \longmapsto \mathcal{L}(\sigma) = \int_0^l |\sigma'(s)|\, ds \in \mathbb{R}.$$

- 関数 $\mathcal{L}$ は $\gamma \in \mathcal{C}$ で最小値をとる．このとき，$\mathcal{L}$ の要素の 任意の 1 パラメータ族 γ_w $(w \in (-\varepsilon, \varepsilon)$; $\gamma_0 = \gamma)$ を考えると，一変数関数 $w \mapsto \mathcal{L}(\gamma_w)$ は $w = 0$ で最小値をとる．したがって（微分可能性などいろいろと仮定すると...）次が成り立つ：

$$\frac{d}{dw}\bigg|_{w=0} \mathcal{L}(\gamma_w) = 0.$$

■面積最小の曲面 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3$ の単純閉曲線とする．曲面

$$p\colon \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad p(\partial D) = \Gamma \qquad \bigl(D = \{(u,v) \,|\, u^2 + v^2 < 1\}\bigr)$$

は “Γ をはる曲面” と見なすことができる．そのような曲面全体の集合を $\mathcal{S}$ とする．

定理 12.2 (面積最小曲面)**.** 曲面 $p \in \mathcal{S}$ が $\mathcal{S}$ の要素のなかで最小の面積をもつならば p は極小曲面，すなわち，平均曲率が恒等的に 0 となる曲面である．

2014 年 1 月 16 日