2014 年 1 月 27 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 14

お知らせ

- 今回が最終回です．**ご聴講ありがとうございました．**
- 【協力のお願い】今学期より「授業評価」 は web 上で行なっています．お手数をおかけしますが,「東工大ポータル」に入って「授業評価 Course Evaluation」のページよりご回答お願いいたします.
- 【定期試験のお知らせ】定期試験は **2 月 3 日**に行います．詳細は中間試験答案につけた「定期試験予告」にて．まだ答案を受け取っていない方は数学事務室（本館 3 階 H332B）にて返却しております.

授業に関する御意見

- この欄では毎回質問や希望を書かせますが，常にあるわけではないので色々考えるのはしんどいです．自由記入になるといいです.
  山田のコメント： しんどいことをやってもらうのが課題なのでは?
- トーラスを三角形でブンカツするイメージが湧きませんでした．その図をみせていただけたら嬉しいです.
  山田のコメント： 正方形を考えなさい．その向かい合う辺を同一視して（貼りあわせて）適当に伸縮させればトーラスができる．最初の正方形を適当に（どうやればよいか）三角形分割するとトーラスの三角形分割が得られます.
- なし/特にありません/今回は特にないです　**山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問： 多面体のオイラー数についてですが，全ての面が m 角形のとき，#頂点 $= a$, #辺 $= b$, #m 角形 $= c$ とおくと，各面に対角線を $m-3$ 本加えると各面は三角形で構成され, #頂点 $= a$, #辺 $= b+(m-3)c$, #m 角形 $= (m-2)c$ となって，$a-b+c = (a-\{b+(m-3)c\})+(m-2)c$ より何角形に分割してもオイラー数は不変，ということですか.

お答え： 大体そうですが,「何各形に分割しても，頂点の数，辺の数，面の数の交代和は不変」と言ったほうがよいですね．ちなみに，分割する多角形の辺の数が一定でなくても同じことが成り立ちます（確かめよ).

質問： 球面の分割で，正四面体や正二十面体の他に正六面体（立方体）の形でも $\chi(S) = 2$ となりますが，一般に $\chi(S)$ は分割が資格家や五角形でも値が変わらないということですか．またそうだとしたらなぜ「三角形」分割にこだわっているのかも気になります.

お答え： 前半：そうです．後半：次元をあげていったとき，三角形・四面体の一般化である「単体」を考えるのが都合がよいからだと思います.

質問： 辺が測地線とは限らない三角形による分割でもオイラー数が変わらないということの理由がよくわかりません.

お答え： オイラー数は三角形分割のとり方によらない（これは測地線とは関係のない定理）ことから得られます．位相幾何学の適当な教科書を見て下さい.

質問： オイラー数は実用的に使えそうな関数であるように感じましたが，そういう例はあるのでしょうか.

お答え： 実用の意味がわかりませんが，沢山あります.「位相幾何学」という名前のついた入門的教科書をごらんなさい.

質問： オイラー数がよく分からなかったのですが，何か良い参考書はありますか.

お答え： 「位相幾何学」という名前のついた入門的教科書なら大抵書いてあります.

質問： ガウス・ボンネの定理を 3 次元以上に拡張した定理はありますか.

お答え： はい．たとえば，丹野修吉「多様体の微分幾何学」(1976, 実教出版）の 176 ページあたりを参照.

質問： 「面積」というものは曲面上の領域から $\mathbb{R}_{\geq 0}$ への写像で，何らかの条件を満たしチエルようなものを指している

と考えてよいのでしょうか．また，面積の定義やその定義が問題なく定まっているかなど気になるのですが，どのような本を参考にすればよいのでしょうか．

お答え： この講義では，パラメータづけられた曲面 $p(u,v)$ の，uv 平面上の有界領域 D に対応する部分の面積をテキスト 60 ページ (6.10) を面積の定義式とみなしています．$\mathbb{R}^3$ のルベグ測度から曲面上の測度を誘導している，というように見ることもできますが，ここでは深入りしません．

質問： 閉曲面のオイラー数が閉曲線の回転数とある意味で同じ量ということですか?

お答え： ある意味では，似た側面があるということです．ただし回転数は外的であるのに対してオイラー数は内的．

質問： 空間では閉曲面 S に対して大域的なガウスボンネの定理がありましたが，平面ではそれに対応しているのが閉曲線 C に関する $i_\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^l \kappa(s)\,ds$ というように考えて良いのですか?

お答え： ある意味では．あくまでも一側面ですが．

質問： 曲面上の測地線のなす角はどのように定義されているのでしょうか．「測地線の交点における 2 本の測地線の接線のなす角」で良いですか．

お答え： よいです．速度ベクトルのなす角，と言い換えられますね（テキスト 68 ページくらい）．

質問： 平面では 3 点 A, B, C がこの順に同一直線上にあるとき $\angle\mathrm{ABC} = \pi$ となりましたが，曲面上でも 3 点 A, B, C がこの順に同一直線上にあるとき $\angle\mathrm{ABC} = \pi$ となるのですか?

お答え： なるのです．点 B からでる 2 本の線分は，互いに反対向きの速度ベクトルをもつので．

質問： ガウスボンネの定理についてです．今回の 13-1 で点を 2 測地線の交点でないところに取ったのですが，これを三角形とみなして $\angle$A, $\angle$B, $\angle$C としてよい理由がわかりませんでした．なぜですか?

お答え： むしろ，三角形とみなしてはいけない理由がわかりません．測地三角形の定義ってなんでしたっけ．

質問： 十分小さい r の範囲で測地的極座標が存在するとは，近似的に存在するという意味ですか．それとも範囲内では曲面を正確に表しているのですか．

お答え： 正確に表しています．今回もう少し詳しく説明します．

質問： 問題 13-3 の全曲率は $\iint_\Sigma K\,dA$ (K: ガウス曲率，dA：面積要素) のことでよいですか（それを前提にして解きました）．

お答え： よいです．

質問： $\sup\left(\iint_D K\,dA\right)$ はありますか．もしくは，この全曲率が発散する場合もあるでしょうか．

お答え： どの範囲で sup をとるのでしょう．この式からは読み取れません．閉曲面でなければ全曲率が発散することがあります．もちろん，閉曲面なら全曲率が存在します．

質問： $r_{\text{神}}$ のような漢字のそえ字は TEX などで出せますか． **お答え：**だせてますね．

質問： 期末試験は 10 月からの内容全てですよね? **お答え：**試験予告を見てください．

14 ガウス・ボンネの定理（つづき）

- 測地三角形に関するガウス・ボンネの定理（測地的極座標とガウスボンネの定理の証明 §11）
- 大域的なガウス・ボンネの定理 (§10)
- 測地線とは限らない境界を持つ場合について

2014 年 1 月 27 日