2014 年 2 月 3 日 10 時 45 分 ∼12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

幾何学概論 定期試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解できるように書いてください.
- 計算や下書きにはは余白や裏面および所定の計算用紙を使用してください（採点の対象とはしません）.
- 試験終了後は, **解答用紙**, **計算用紙**と**持込用紙**を回収します. 問題は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案はおそくとも **2 月 12 日**には**数学事務室（本館 3 階 332B）**にて返却いたします.
- 採点に関する質問・クレイムなどは **2014 年 2 月 17 日**までに山田まで**電子メイル**にてお申し出ください. 上記期日以降のクレイムは, **たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**. ご了承下さい. また, 返却答案を受け取らない方はクレイムをつける権利がありません.

指定用紙のみ持込可

参考：双曲線関数の性質

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \qquad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, \qquad \frac{d}{dx}\tanh x = 1 - \tanh^2 x.$$

問題 A [70 点] $\underline{\text{正の定数}}$ a, b が $\underline{a^2 + b^2 = 1}$ を満たしているとき, $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 p を

$$(*) \quad p\colon \mathbb{R}^2 \ni (u,v) \longmapsto$$
$$p(u,v) = \bigl(a\cosh u\cos v + b\sinh u\sin v,\ a\cosh u\sin v - b\sinh u\cos v,\ au + bv\bigr) \in \mathbb{R}^3$$

で定義する. 次の文中の $\boxed{\ 1\ }$∼$\boxed{\ 10\ }$ に最もよく充てはまる数・式を入れ, 下線 **a** ∼ **d** をつけた部分の証明をつけなさい.

- 式 $(*)$ の p は $\mathbb{R}^2$ 全体で$_{\mathbf{a}}$$\underline{\text{正則な曲面のパラメータ表示を与えている}}$. とくに p の単位法線ベクトルは $\nu = \boxed{\ 1\ }$, 第一基本形式は $ds^2 = \boxed{\ 2\ }$, 第二基本形式は $I\!I = \boxed{\ 3\ }$ となるので, この曲面の主曲率は, $\boxed{\ 4\ }$, ガウス曲率は $\boxed{\ 5\ }$, 平均曲率は $\boxed{\ 6\ }$ である.
- 正の実数 α, β に対して, uv 平面上の集合

$$D := \{(u,v) \,|\, 0 \leqq u \leqq \alpha,\ 0 \leqq v \leqq \beta\}$$

  に対応する曲面 p の部分の面積は $\boxed{\ 7\ }$ である.
- 空間曲線 $\gamma(s) := p\bigl(0,s\bigr)$ は曲面上の曲線で $_{\mathbf{b}}$$\underline{s\ \text{は弧長パラメータである}}$. この曲線の曲率は $\boxed{\ 8\ }$, 捩率は $\boxed{\ 9\ }$ となる. とくに$_{\mathbf{c}}$$\underline{\text{加速度ベクトル}\ \gamma''(s)\ \text{が曲面の法線の方向を向く}}$ ので, $\gamma(s)$ は曲面の測地線である.
- 定数 c に対して $\sigma(t) = p\bigl(t,c\bigr)$ とおく. このとき, $_{\mathbf{d}}$ $\underline{\{c \in \mathbb{R} \,|\, \sigma\ \text{は曲面}\ p\ \text{の測地線}\} = \boxed{\ 10\ }}$ である.

2014 年 2 月 3 日 10 時 45 分 ~12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

幾何学概論 定期試験 〔問題 2〕

問題 B [20 点] 弧長 s をパラメータとする平面曲線 $\gamma(s)$ $(-\infty < s < +\infty)$ が次の性質を持っているとする：

- $\gamma(0) = (0, 0)$, $\gamma'(0) = (1, 0)$.
- 曲率関数は $\kappa(s) = \cos s$.

このとき

$$\gamma(s + 2\pi) = \gamma(s) + \boldsymbol{b} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

を満たす $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0})$ が存在することを示しなさい.

問題 C [20 点] 曲面 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$ 上の点 (a, b, c) におけるガウス曲率を求めなさい.

おつかれさまでした ♡

問題 A の解答欄 各 5 点　　**幾何学概論 定期試験 〔解答用紙 1〕**

1 $\dfrac{1}{\cosh u}\bigl(-\cos v, -\sin v, \sinh u\bigr)$		2 $\cosh^2 u\bigl(du^2+dv^2\bigr)$	
3 $-a\,du^2-2b\,du\,dv+a\,dv^2$	4 $\dfrac{-1}{\cosh^2 u}, \dfrac{1}{\cosh^2 u}$	5 $\dfrac{-1}{\cosh^4 u}$	6 0
7 $\dfrac{\beta}{2}(\alpha+\cosh\alpha\sinh\alpha)$	8 a	9 b	10 $\mathbb{R}$

問題 a

$p_u(u,v)=a\,(\sinh u\cos v, \sinh u\sin v, 1)+b\cosh u\,(\sin v, -\cos v, 0)$,
$p_v(u,v)=a\cosh u\,(-\sin v,\cos v,0)+b\,(\sinh u\cos v,\sinh u\sin v,1)$ なので，
$a^2+b^2=1$ に注意すれば $p_u\times p_v=-\cosh u(\cos v,\sin v,\sinh u)$ なので
$|p_u\times p_v|^2=\cosh^2(1+\sinh^2 u)=\cosh^4 u\geqq 1$ となり，$\{p_u,p_v\}$ は一次独立である．

問題 b

$\gamma(s)=\bigl(a\cos s, a\sin s, bs\bigr)$ なので，
$\gamma'(s)=\bigl(-a\sin s, a\cos s, b\bigr)$.
したがって $|\gamma'(s)|^2=a^2+b^2=1$.

問題 c

$\gamma''(s)=-a\bigl(\sin s,\cos s,0\bigr)$ であるが，$\gamma(s)$ における曲面の法線ベクトルは $\nu(0,s)=(-\cos s,-\sin s,0)$ となり，これらは平行である．

問題 d

$\dot\sigma(t)=p_u(t,c)$ ($\dot{}=d/dt$) だから $|\dot\sigma'(t)|=|p_u(t,c)|=\cosh t$. したがって $s=\sinh t$ とすれば s は σ の弧長である．
いま，$'=d/ds$ と書けば，$s=\sinh t$ として

$$\sigma'(s)=\frac{1}{\cosh t}p_u(t,c),\qquad \sigma''(s)=\frac{1}{\cosh^3 t}p_u(t,c)+\frac{1}{\cosh^2 t}p_{uu}(t,c)$$

となる．ここで

$$p_u\cdot p_v=0,\qquad p_u\cdot p_u=\cosh^2 u,\qquad p_u\cdot p_{uu}=\sinh u\cosh u,\qquad p_v\cdot p_{uu}=0$$

に注意すれば

$$\sigma''(t)\cdot p_u(t,c)=0,\qquad \sigma''(t)\cdot p_{uu}(t,c)=0.$$

したがって σ'' は曲面の接ベクトルに直交するので法ベクトルと平行である．

学籍番号	氏　名

2014 年 2 月 3 日 10 時 45 分 ~12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

幾何学概論 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄

関数 $\theta(s)$ を $\theta(s) := \int_0^s \kappa(t)\,dt = \sin s$ と定めれば，

$$\gamma(s) = \int_0^s (\cos\theta(t), \sin\theta(t))\ dt = \int_0^s \bigl(\cos(\sin t), \sin(\sin t)\bigr)\,dt$$

と表されるから，

$$\begin{aligned}\gamma(s+2\pi) &= \int_0^{s+2\pi} \bigl(\cos(\sin t), \sin(\sin t)\bigr)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \bigl(\cos(\sin t), \sin(\sin t)\bigr)\,dt + \int_{2\pi}^{2\pi+s} \bigl(\cos(\sin t), \sin(\sin t)\bigr)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \bigl(\cos(\sin t), \sin(\sin t)\bigr)\,dt + \int_0^{s} \bigl(\cos(\sin t), \sin(\sin t)\bigr)\,dt\end{aligned}$$

ここで，最後の変形は，置換 $2\pi + s = u$ と cos, sin が周期 2π を持つことを用いた．右辺の第 1 項は s によらない定ベクトルなので，これを $\boldsymbol{b}$ とおけば $\gamma(s+2\pi) = \boldsymbol{b} + \gamma(s)$ となる．

計算スペース

学籍番号	氏　名

幾何学概論 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄

$f(x,y,z) = (x^4+y^4+z^4-1)$ とおけば，$S = \{(x,y,z)\,|\,f(x,y,z)=0\}$ と書ける．$(f_x,f_y,f_z) = 4(x^3,y^3,z^3)$ だが，$f(0,0,0) = -1 \neq 0$ であるから $S := \{(x,y,z)\,|\,f(x,y,z)=0\}$ 上で $(f_x,f_y,f_z) \neq \mathbf{0}$．したがって陰関数定理により S はなめらかな曲面を与えている．
とくに $z \neq 0$ となる点の近くで，S は $z = z(x,y)$ のグラフで表すことができる:

$$p(x,y) = \big(x,y,z(x,y)\big).$$

陰関数の微分公式を用いれば，$z_x = -f_x/f_z = -x^3/z^3$, $z_y = -y^3/z^3$ であるから，

$$p_x = \left(1, 0, -\frac{x^3}{z^3}\right), \qquad p_y = \left(0, 1, -\frac{y^3}{z^3}\right).$$

したがって，第一基本量は $E = 1 + (x/z)^6$, $F = (x^3y^3)/(z^6)$, $G = 1 + (y/z)^6$ となり，

$$EG - F^2 = \frac{x^6+y^6+z^6}{z^6}, \qquad \nu = \frac{1}{\sqrt{x^6+y^6+z^6}}(x^3,y^3,z^3)$$

を得る．
ここで $z_{xx} = -\dfrac{3x^2}{z^3} + \dfrac{3x^3}{z^4}z_x = \dfrac{-3x^2}{z^7}(x^4+z^4)$, $z_{xy} = \dfrac{-3x^3y^3}{z^7}$, $z_{yy} = \dfrac{3y^2}{z^7}(y^4+z^4)$ だから，第二基本量は

$$L = \frac{-3x^2(x^4+z^4)}{z^4\sqrt{x^6+y^6+z^6}}, \quad M = \frac{+3x^3y^3}{z^4\sqrt{x^6+y^6+z^6}}, \quad N = \frac{-3y^2(y^4+z^4)}{z^4\sqrt{x^6+y^6+z^6}}.$$

となるから，

$$LN - M^2 = \frac{9x^2y^2(x^4+y^4+z^4)}{z^4(x^6+y^6+z^6)} = \frac{9x^2y^2}{z^4(x^6+y^6+z^6)}.$$

ここで，最後の等式は，S 上で $x^4+y^4-z^4-1=0$ であることを用いた．
以上から，$z \neq 0$ なる点では

$$\frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{9x^2y^2z^2}{(x^6+y^6+z^6)^2}.$$

とくに右辺は (x,y,z) の連続関数だから，$z = 0$ でも等式が成り立つ．

点 $(x,y,z) = (a,b,c)$ におけるガウス曲率は $K = \dfrac{9(abc)^2}{(a^6+b^6+c^6)^2}$.

学籍番号	氏　名

幾何学概論 定期試験 〔解答用紙 4〕

計算スペース（この用紙も提出してください）

学籍番号	氏　名

幾何学概論 定期試験 〔解答用紙 5〕

この用紙も提出してください

問題 D [0 点] なにか言い残すことがありましたらお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切影響しません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．ご自分の学籍番号の座席に着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 5 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
- **解答用紙 5 枚 (この紙を含む) と持ち込み用紙はすべて提出**してください．持ち込み用紙を持参しなかった方は提出しなくて結構ですが，解答用紙が **5 枚揃っていない答案は採点いたしません**.
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，解答用紙 5, 持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号	氏　名