2014 年 4 月 16 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 2

お知らせ

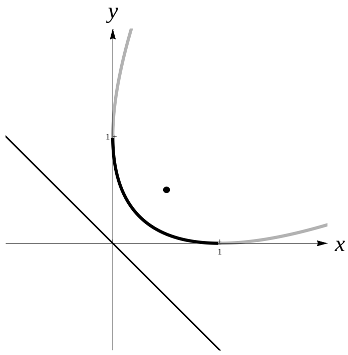
- 提出されたものは入口前の机にて返却しています．お持ち帰りください．もし返却方法に不満があるようでしたら，クラスで適当にオーガナイズしてください．
- ご質問やご意見への回答，コメントは，返却用紙の上では「非常に汚い」字で書かれています．これは山田用のメモでありまして，実際のコメントなどはこの用紙をご覧ください．
- 質問の「言葉が変」というコメントを多数つけています．「言葉尻をとらえてないで，想像して答えよ」とおっしゃるかもしれませんが，そうしないのが教育的配慮と思っています．「言葉がきちんと使えるようになること」が文明人としての第一歩です．練習しましょう．

前回の補足

- 関数の定義域・値域・像について：例えば関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \sin x$ で定めましょう．（この文の書き方を真似てご覧なさい．自己流で書くのと違いませんか．）こう言うと，値域は $\mathbb{R}$ でなくて $[-1, 1]$ ではないか，という質問がきます．この授業では「値域」を「あらかじめ想定されている f の値の範囲」とします．一方「本当に f のとりうる範囲」を f の「像」といって区別しています．この例では，f の像は $[-1, 1]$ で確定していますが，値域は「あらかじめの f の値の範囲」をどう考えるかによっていろいろです．この例では $\mathbb{R}$ に値をとると想定しているという意味で値域は $\mathbb{R}$ です．しかし，最初から $[-1, 1]$ を値域と考えることもできます．
  一般に，与えられた関数の像を求めるのはやさしくありません．記号 $f\colon A \to B$ が像でなければならないのなら，有用な関数ですらこのように表せないことになります．
- 関数と写像の関係についてのご質問を複数いただきました．ここで考える関数は写像です．習慣として，値域が数の集合 (実数や複素数の集合）であるとき関数というようです．

前回までの訂正

- 講義で挙げた $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ が表す図形が違っていました．右図の黒の部分が，この式で表される図形です．この曲線は灰色の部分までなめらかに延長でき，全体として放物線になります．実際，黒と灰色の部分を合わせた図形は方程式 $(x - y)^2 - 2(x + y) + 1 = 0$ で表され，これは点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ と直線 $x + y = 0$ からの距離が等しいような平面上の点の集まりです
  右図のように座標原点「O」が明記されていないのが間違いではないか，というご質問を複数いただきました．明記していませんが，書いた方がよいですね．Mathematica® の `Plot` コマンドの `Ticks` オプションではうまくいかないので（手作業で入れることも可能ですが，手間をかけたくないので）お許しください．正しい `Ticks` オプションの使い方をご存知の方は教えてください．



- 配布資料 4 ページ，下から 3 行目：$\int_{\pi}^{\pi} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}$
- 講義ノート 3 ページ，一番下，f_3 の定義式右辺の最初：$x \sin \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x \Rightarrow x^2 \sin \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x$
- 講義ノート 4 ページ，5 行目：$\{0, 1\}$, $\mathbb{R}$, $\{0, 1\} \Rightarrow \mathbb{R}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 1\}$
- 講義ノート 4 ページ，脚注 12：関数 $f_4 \Rightarrow$ 関数 f_3

授業に関する御意見

- すみません．紙を無くしてしまいました/ 初回から別の紙で申しわけありません/ 用紙を家に忘れたので，この紙で失礼します/ 4/9 の授業で遅れてしまい，急いでいたために質問用紙をとりそこねました．今回だけ別の紙で代用させてください．本当にすいません（原文ママ：すみませんでは?）でした．
  山田のコメント： だめ．用紙は講義 web ページ，OCW においてありますので自分で調達してください．
- もう少し室温を下げていただけるとありがたいです/ 教室が暑かったです/ 少し暑かったです/ 部屋があたたかくて眠くなってしまいました/ 暑くはないけどもうすこしすずしくてもいいなと思いました/ 教室の温度が少し高かったです/ 講義室の室温を少し下げてくれるとありがたいです/ 少し温度が高いです/ 少し暑かったです． **山田のコメント：** 次回は少し下げてみましょう．
- もう少し，カメラ全体が（黒板で 1 枚くらい）うつるように撮影した方がわかりやすいと思います． **山田のコメント：** 担当者に伝えました．
- もう少しゆっくりとしゃべってくれるとありがたいです． **山田のコメント：** Sorry.
- **1-5** と **1-7** は内容が殆ど変わらないと思います． **山田のコメント：** 違います．F の存在が．
- 先生の声がとても心地よかったので，すっかり眠くなってしまいました．おそらく犠牲者は僕だけではないです．先生には UVERworld というバンドをお薦めします．発声の参考になさってください．**山田のコメント：** かわらないかもね．イタリアオペラじゃだめですか．
- 授業中に質問ができる環境もしくはデバイスが欲しいです! **山田のコメント：** 声をあげる，ということでどうでしょう．
- 講義を受けるにあたって，ノートをとるのと先生の説明を両立させるのが難しかったです． **山田のコメント：** とりあえず，ちょっとメモをとる程度にしてみてもよいのでは?
- このプリントは毎回の提出物ということですか? 成“績”はどうやって付けていますか? **山田のコメント：** はい．講義概要を参照のこと．
- 黒板に番号を書いて順番を見やすくするのはいいと思います． **山田のコメント：** でしょ．
- 映像を合わせた授業は新鮮でとても面白かったです．ありがとうございました． **山田のコメント：** 手間がかかります．
- 例が沢山あったのとパソコンのグラフが見れたことで，非常にイメージが湧きやすかったのがよかったです． **山田のコメント：** イメージだけではだめだとおもいます．
- 関数のグラフを，パソコンで描いたものを見せていただけたので，理解しやすかったです．今後も使っていただけると嬉しいです． **山田のコメント：** 手間がかかりますが. . .
- 図が多くて分かりやすかったです．次元が増えたとき，図を使った説明ができるのか気になりました． **山田のコメント：** 図に頼って理解するだけではダメということです．
- 特に後半は具体例が多く，とても分かりやすかったです． **山田のコメント：** ですか?
- プリントがすごく復習に役立ちます．分かりやすいです． **山田のコメント：** Thanks
- 左右に板書が写されているので見やすかったです．漢字ドリル買おうと思いました． **山田のコメント：** ドリルは買わなくてもよいですが，漢字に気をつけるのはいいですね．
- 2 変数関数のところで出て来た等高線の考え方は，大学受験でも似たような発想で解く問題を思い出し，興味深かった． **山田のコメント：** そう?
- 数学なのに言葉や英文法の話まででてきて，幅の広い知識を得る機会をつくってくれる良い授業だと思った．これからもこのような授業を期待させて頂きます．
  山田のコメント： ご期待に添えるかどうかわかりませんが．
- すごく関心のもてる授業でした． **山田のコメント：** はい．
- 話す間が，私にとって最高でした． **山田のコメント：** どうも
- 教室がこれから先移動することはありますか? **山田のコメント：** 中間試験のときだけ．
- 教室が遠い. . . **山田のコメント：** Sorry.
- 出来が悪くてご迷惑おかけすると思いますが，よろしくお願い致します． **山田のコメント：** 迷惑ではありません．
- 数学苦手ですがついて行けるよう頑張ります．よろしくお願いします/ よろしくお願いします **山田のコメント：** こちらこそ．
- 特にありません **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問： 有理数を「整数分の整数で表せる数」と説明していたが，正確には分母の 0 は定義されないので，上記の定義は不十分であると考える．

お答え： (整数)/(0 でない整数) といってもやはり不十分で，3/2 がひとつの「数」を表すということをどうやって示すのか，というのが問題です．さらに 3/2 と $(-3)/(-2)$ が同じなのはどうしてか，など，脇があまいところが見え隠れしますね．実際，整数を用いて有理数を定義するには，2 つの整数の組の集合 $\{(x,y)\,|\,x,\,y$ は整数で $y\neq 0\}$ をまず考えて，そのうち“分数 x/y として同じ値になるもの”を同一視する（数学に詳しい人なら「同値類を考える」）というプロセスを経ます．数学を使う立場でいえば，そういったことは気にしないでよいと思います．その立場では「整数分の整数で表せる数」は，実は絶妙にただしいのです．実際，分母が 0 になる場合は「数を表さない」のですから，3/0 は有理数になりませんよね．

質問： 実数が数直線上にめもれる数であることは，その数の集合からどの 2 数をとり出しても必ず大小関係が存在する数の集合か． **お答え：**どの 2 つの実数も大小が比較できる．これは正しい．しかし「実数全体の集合とはどの 2 数を取り出しても必ず大小関係がある集合」は正しくないです．「有理数全体の集合」もこの性質を持っているので，この性質だけでは実数全体の集合と特定することはできていません．

質問： $\mathbb{R}^2$ が平面座標で，$\mathbb{R}^3$ が座標空間だったら $\mathbb{R}^4$ は何ですか? イメージがわきません．4 次元ですか? また，3 変数関数や 4 変数関数のグラフはどのようなグラフになりますか．

お答え： 「平面座標」と「座標空間」で言葉の使い方が違いますが，おかしくありませんか? $\mathbb{R}^2$ は「2 つの実数の組全体の集合」，$\mathbb{R}^3$ は「3 つの実数の組全体の集合」というのが「もとの」定義で，それを「座標平面」「座標空間」とみなすことができるのは二次的なことと思いましょう．$\mathbb{R}^4$ は 4 つの実数の組全体の集合でであって，$(1,1,-1,2)$ や $(2,0,-\pi,\log 2)$ は $\mathbb{R}^4$ の要素．それだけです．イメージはいまのところ沸かさなくてよいです．高次元の空間は微積分よりも線形代数の方でよく扱うと思いますが，計算したり論理的に扱っていくうちにイメージは見つかります．先にイメージを求めるものではありません．

質問： 「正の整数 n に対して n 個の実数の組全体の集合を $\mathbb{R}^n$ と書く」とあり，$n=1,\,2,\,3$ のときには，それぞれ数直線，座標平面，座標空間とみなすことができるところまでは分かりまスが，$n=4,\,5,\,6\ldots$ のときは何を表わしているのか，$n=1,\,2,\,3$ のときと比べるとイメージもできず分かりません．また，4 次元，5 次元. . . n 次元の世界は自分が生きている世界には無い (?) にもかかわらず，それを考えることにはどのような意味があるのですか．

お答え： $\mathbb{R}^n$ はただ n 個の実数の組全体の集合です．たくさん計算や論理を繰って慣れてくるとあなたなりのイメージができてきます．その前にイメージがほしいというのはわがまま．ところで，ほんとうにわれわれの住んでいる世界は 3 次元ですか? 時空は 4 次元，でも高次元時空を考えるほうが自然だ，なんていう話は聞いたことない?

質問： 講義中に用いていた “$\rightsquigarrow$” という記号は数学で使われる記号ですか．そうであれば読み方と意味を教えてください． **お答え：**あまり使いません．この講義では，正式に “$\to$” と書きたくないときに使ったりします．

質問： f:「$A \to B$」（原文ママ：「」は不要では?）のときの関数 f のするはたらきのことを写像とよべばいいんですか．

お答え： 集合 A の各要素に対して集合 B の要素を対応させる働きを写像といいます．「写像 f は，A の各要素に対して B の要素を対応させる働きである」ということを「$f\colon A \to B$」と書きます．関数とは写像の一種で，B が $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ (複素数全体の集合) の部分集合であるような写像のことです．

質問： 今回，“ある数 x に対して，ひとつの数 $f(x)$ を対応させる対応の規則 f を関数という” と習いました．これは線型代数でやった写像のことなのでしょうか? ぶっちゃけ写像とのちがい，というか写像そのもの概念がよくわかりません．教えてほしいです． **お答え：**前の質問と回答参照．

質問： 線型代数の方で教わった「写像」と関数の違いがわかりません．「写像」の単射が関数なのでしょうか．違いを教えていただけるとありがたいです． **お答え：**いいえ．2 つ前の質問と回答参照．

質問： f が $D \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数であることを表す $f\colon D \to R$ (原文ママ：この授業では太字の $\mathbb{R}$ を用います．) の $\to$ は $A \to B$ で A から B への写像を表す $\to$ と同じ意味? 機能? ですか． **お答え：**そうです．

質問： 対応のルールは写像の考えに近いですか． **お答え：**写像です（近いのではなくそのもの）．

質問： 「$\to$」と「$\mapsto$」の違いを教えてください．

お答え： 「$f\colon A \to B$」は「集合 A の各々の要素に集合 B の要素を対応させる規則 f」，「f は A から B への写像」，「f は定義域を A，値域を B とする写像」と読む．具体的な対応の規則に関する情報は含まれない．一方，「$f\colon x \mapsto x^2$」は，「f は x に対して x^2 を対応させる規則」と，対応の規則を具体的に表すのに使う．“$\to$” の左右に来るのは写像の定義域・値域（したがって集合），“$\mapsto$” の左右に来るのは，それぞれ定義域・値域の要素．

質問： 講義ノートの 2 ページで，“f は定義域を $\mathbb{R}$，値域を $\mathbb{R}$ とする関数である” ということを $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と書くとありましたが，$f\colon \mathbb{R}(\leftarrow$ 定義域$) \longrightarrow \mathbb{R}(\leftarrow$ 値域$)$ で合ってますか? **お答え：**合ってます．

質問： $f\colon D \to \mathbb{R}$ は D が定義域 $\mathbb{R}$ が値域という意味ですか? **お答え：**そうです．

質問： くだらない質問だと思いますが，変数が x や y など 2 つでも $x + y \in \mathbb{R}^2$ でなく $x + y \in \mathbb{R}$ となりますか? 私は $x + y$ という値のため，結果として 1 次変数となるため，$x + y \in \mathbb{R}$ となると思うのですが...

お答え： 「1 次変数」の意味がわかりません．$3 \in \mathbb{R}$, $2 \in \mathbb{R}$ ですが，$3 + 2 = 5 \in \mathbb{R}$ ですね．$(3, 2) \in \mathbb{R}^2$ です．

質問： $\mathbb{R}^2$ の 2 を 2 乗と勘違いしそうになりました．どうして右上につけるのですか? 右下や左上につけても良さそうなのに，単位だから仕方のないことなんですよね．

お答え： 「単位」ってなんでしょう．右上につけるのは $\mathbb{R}^2$ が「$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ の直積集合」（これを $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ と書く．もちろん数の掛け算ではない）と同一視されるから．

質問： ある数に対して 1 つに決まる数の規則が関数だと学びましたが，逆は 1 つでなくても良いという解釈でよいですか．そしたら，ある数から他の数への変換が関数でも逆は関数でないということもたくさんあるという考えで合っているのでしょうか． **お答え：**その通り． 1 対 1 まで要求すると，2 次関数や定数関数が関数になりませんよね．

質問： $f(x) =$ (略，例 1.4 の (3)) という関数はいつ使うか．また，この関数に連続な区間はあるか．

お答え： いま使ったでしょ．“ディリクレ関数” でぐぐってみてください．なお，この関数は至るところで不連続です（ちゃんとした証明は後期にやりましょう）．

質問： 先生の講義ノートで質問があります．例 1.4 の (3) の関数のグラフ (6 ページの (e)) について，「灰色の線は x 座標が有理数」「黒の線は x 座標が無理数」と書かれているのですが，実際のグラフでもこのようになるのでしょうか? 実数（数直線）上において，無理数のほうが有理数より濃度が高いので，このグラフで $y = 0$ の直線のほうが $y = 1$ の直線より実際に濃くても納得できますが，見やすく書いているだけかもしれないと思ったので，質問させていただきました．

お答え： 「実際の」グラフとは何か分かりませんが，「有理数」と「無理数」違いを数直線上に図示することは原理的にはできません．点を紙面に描くとしたら大きさをもたせなければいけませんから，その点の範囲に有理数も無理数も無限に含まれてしまいます．というわけで “模式図” と思ってください．

質問： 関数の定義域は数式で表すのと言葉で表すのとどちらが望ましいですか． **お答え：**曖昧でなければどちらでも．

質問： 1 変数関数は平面に，2 変数関数は空間にグラフを書くことができますが，3, 4... 変数関数はグラフにしようと思えばできますか． **お答え：**この授業でのグラフの定義はなんでしたか? （講義ノート 6 ページ）

質問： 2 変数関数までならどんな関数もグラフは書けますか?

お答え： グラフは存在します（何変数でも）が，「書ける」とはどういうことでしょう．

質問： 二変数関数なら必ずグラフにおこせるのですか? **お答え：**「グラフにおこす」とは何をすることですか?

質問： 2 変数関数の場合，空間には必ずグラフを描けるのでしょうか． **お答え：**グラフは存在します．

質問： 3 変数関数をグラフに書くことはできませんか？ 1 変数が線，2 変数が平面なので，3 変数の場合立体になりそうで，グラフ上に書けそうなのに実際には軸が 1 つたりないのが不思議です．

お答え： 一般に 2 変数関数のグラフは平面ではありません．

質問： 3 次元のグラフを手書きする方法か，パソコンで書き起こす方法が知りたいです．

お答え： 「3 次元のグラフ」って何ですか．授業では「2 変数関数のグラフ」は扱いましたが．

質問： $z=x^2+y^2$ の立体的グラフは放物線を回転すればできそうでイメージがつきやすいけれど $z=x^2-y^2$ のグラフは $x^2+y^2=z$ のようにカンタンにイメージすることはできないのか?

お答え： 「立体的グラフ」とは? 単に「グラフ」と書くべきです．で，$f(x,y)=x^2-y^2$ のグラフが xz 平面上の放物線を yz 平面上の放物線にそって平行移動していった軌跡だということは口頭で説明しましたよね．

質問： 山田先生含め世の数学者たちは，4 次元以上のグラフに対してどのようなイメージを持っているんですか?

お答え： 「4 次元以上のグラフ」は何を指してますか．講義で扱っていない語ですので，意味をすり合わせるべき．

質問： 2 変数関数までは視覚的にとらえられるが，3 変数以上の関数をコンピューターグラフィックをつかって（原文ママ：コンピュータ・グラフィクスのことか）視覚的にとらえられますか? もしできるならやってみてほしいです．

お答え： 等高面を書いてみよ．

質問： すみません．2 変数関数は 3 次の立体の側面になるというところがよく分かりません．普通に平面になるのではないのですか． **お答え：**そんなことどこで言いましたっけ．関数は図形ではありません．関数と関数のグラフを区別せよというのが前回の講義の 1 つのテーマでしたね．「3 次の立体の側面」とはまた自己流な言葉の使い方ですね．これでは何を言っているか伝わりません．「普通に」は何が普通なんでしょう．

質問： 今回の 2 変数関数の式を $z=f(x,y)$ としてグラフにすることは 3D プリンタの技術に関係がありますか．

お答え： ないとはいえませんが，3D プリンタのほうがずっと先をいっています．この質問に違和感を覚えるのは，「掛け算九九はスーパーコンピュータの技術に関係がありますか」という質問と同等に見えるから．もちろん関係があるけど，それ以外のたいていの技術にも関係しているわけで．

質問： 体積を求める積分は，$z=$ 一定 的な切り口を微小区間足しあわせて（原文ママ；文が変），積分していますが，いま話題となっている 3D プリンタなどは積分を応用して発明されたのですか?

お答え： 積分してしまっては切り口の形がわからなくなってしまいませんか?

質問： 2 変数まではグラフとして目でみることができるがそれ以上の変数ではどのようにして目で見えるように表すのか． **お答え：**目で見ないんです．目で見なくても扱えるのが数学の力です．

質問： グラフと関数の違いは良くわかりました．今回習ったグラフと等高線は三変数関数以上のときは使えなくなると思いますが，次元が高くなったときは数式のみで考えていくのでしょうか．高校ではグラフ中心に関数を扱っていたので不安です． **お答え：**そう，数式のみで考えていく．それに慣れてくると新しい感覚がそなわってくるはず．その前にイメージがほしい，というわがままは言わないこと．

質問： 2 変数関数は波動の分野で出てきましたが，3, 4, ... と数が増えたものは具体的にどのような場面で必要とされるのでしょうか． **お答え：**たとえば，空間の波動は時刻 t と位置 (x,y,z) の 4 つの変数の関数で表されます．

質問： 4 次元以上の研究が私達の住む 3 次元の世界になにか影響を及ぼしたような事例はありますか?

お答え： (1) なぜ私達の住む世界が 3 次元だと思うのか．(2) 4 次元以上というのは，4 つ以上のパラメータで表される現象を記述する世界だと思えば，実例はたくさんある．上の回答参照．(3) 授業の最初に式だけあげた「量子力学」は無限次元空間の線形代数と思える．「4 次元以上は日常に影響しない」と言い切れるほど世界は単純ではない．

質問： 2 変数関数，3 変数関数を考えることは理解できるが，4 変数関数，n 変数関数を考えてどうなるか疑問だ．

お答え： $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_n)^2$ を考えちゃいけませんか?

質問： 多変数関数は変数が多々存在する関数という認識でよろしいのですか? （読んで字の如くですが．）それとも違うよりスマートな認識があるのでしょうか? あるならば教えていただきたいです．

お答え： 「認識」をこういう場面で使うのはたいてい「わかっていない」ケース．「変数が多々存在する関数」の意味が山田には分かりません．したがって，こんなものが「認識」ならば認識なんて捨ててしまえ．講義ノート 4 ページの下の数行に「定義」が書いてあって，多変数関数の意味はそれです．

質問： 3 変数函数のグラフは描く（山田注：原文では旁の田の上に横線あり；誤字）ことができないとプリントに書いてありましたが，通常の 3 次元に加え，色をパラメーターとして使い表すことで描けないでしょうか（実例略）．

お答え： それは等高面．グラフという語でグラフでないものを表してはいけません．問題 1-9 のことでしょうが，問題の趣旨からいって「描くことができない」ということを事実として述べているわけではないですね．

質問： $\{(x, f(x)) \,|\, x \in$ 定義域 $\} \subset \mathbb{R}^2$ というのはイメージ的に（中略）みたいな感じですか?

お答え： 略の部分には $I = [-1, 1]$ で定義された $f(x) = x^2$ のグラフが書いてあるようですね．ですからこれで正しいです．「イメージ的に」ではありません．

質問： 2 変数関数でおもしろい形をしたものがあればそれを見せてほしいです． **お答え：**グラフが? 式の形が?

質問： 「$\{(x, y) \,|\, f(x, y) = c\} \subset \mathbb{R}^2$ の等高線の切り口に曲線が一本出てくる」（口頭）. . . 双曲線の  のペアは 1 本とみなせるのですか?

お答え： 確かに 1 本ではありませんね．訂正します．ですが，ご質問の図の双曲線の “ペア” は $f(x, y) = x^2 - y^2$ の一つの高さの等高線ではありませんね．ところで「等高線の切り口」って変じゃありませんか?

質問： 6 ページの $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D | f(x_1, \ldots, x_n) = c\} \subset D \subset R^n$ （原文ママ：$\mathbb{R}^n$ のことらしい）について，カッコの中に “$\in D$” があるのに “$\subset D$” は必要なんですか?

お答え： いいえ．冗長な記述をしています．とくに D の部分集合であることを強調したかっただけです．

質問： 2 変数関数の増減を表すために用いる等高線の間隔に決まりがあるのかどうかが疑問に思った．

お答え： ありません．調べたい情報に応じて，でしょうね．ちなみに，2 変数関数の “増減” は考えられません．

質問： 数学で等高線が重要だと教えていただきましたが，高校でいう増減表なるものがなければ，やはり概形はわからないと思います． / 変数が 3 つ以上の場合，どう増減表を作ればいいのですか? また変数はいくつまで用いることができますか? **お答え：**なんの概形? 高校で学んだ程度の 1 変数関数のグラフを，増減表を使って描けるのは常識．その上で多変数関数は増減表**だけ**では理解できないということ．後半は，3 変数関数以上の増減表? 2 変数関数の増減表を書いたことがあるんですか? どんなものですか? 最後の質問はナンセンス．いくつでもよい．

質問： 等高線の概念は高校で学んだ体積の求積と同じように切り口を切って重ねあわせた後に積分すれば，目的である円柱の共通部分が求められるのでしょうか． **お答え：**文の前半と後半の関係がわかりません．

質問： 空間のグラフにおける極値の定義はなんですか? **お答え：**この授業では「空間のグラフ」という言葉を一度も使ったことがないと思います．「空間グラフ」という言葉もありますが，それはあなたが想像しているものとは違います．正しくは「2 変数関数のグラフ」です．「グラフの極値」とは言わないと思います．「関数の極値」です．

質問： 2 変数関数以上の関数の極値について考えていたら極値がなんなのか分からなくなりました．2 変数関数のグラフの極値はどのような形か? 極値を通るあらゆる切り口の断面は極値をとるのか? 3 変数以上のグラフの極値は視覚的に分かるのか? （図省略）

お答え： 「グラフの極値」とはいいません．2 変数関数 f が点 (a, b) で極大値をとる，とは，点 (a, b) の十分近くに限れば f が (a, b) で最大値をとることです．（1 変数関数のときも同様に定義したはずです．“増加から減少に移る点” というのは極大値の定義ではありません．）詳しくは後期に扱います．

質問： 等高線図だけでは 1 つのグラフに決定できないと思うのですが，等高線図はあくまでグラフをイメージしやすくするためのものであるという解釈でいいのですか? **お答え：**ご質問の意味がわかりません．等高線もグラフも関数の変化の様子をイメージするための道具です．グラフが目的ではありません．

質問： 等高線は 3 次元のものを 2 次元にうつす時有効であるということでしたが，4 次元のものを 3 次元にうつすことは可能でしょうか．またそれによって 4 次元を視覚的に理解することは可能でしょうか．

お答え： そんなこと言っていません．聞き取れていないですね．「2 変数関数の変化の様子を調べるのにグラフを描くと $\mathbb{R}^3$ の（空間の）中の図形になるが，等高線を書くと $\mathbb{R}^2$ の（平面の）図形になる」という説明がどうして「等高線 3 次元のもの（注：ものってなんだ?) を 2 次元にうつすとき有効」となるのでしょうか．

質問： 要素 $\in$ と部分集合 $\subset$ のつかい分けがよく分かりません．部分集合は全体集合でもなれることから要素とは一致しないのですか． **お答え：**集合は「ものの集まり」です．その「もの」一つ一つが要素です．たとえば集合 $A = \{1, 2, 3\}$ を考えると 1 は A の要素です．一方，部分集合は，もとの集合のいくつかの要素を集めてできる集合です．上の例でいえば $\{1, 2\}$ は A の部分集合です．一つの要素からなる集合 $\{1\}$ も A の部分集合ですが，これは A の要素ではありません．部分集合は「集合」，要素はひとつの「もの」です．住んでいる世界が違うんです．

質問： $\in$ は「要素である」という説明がありましたが，$\{(x_1, x_2) \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ はどのように読むのが正しいのでしょうか．小カッコ・中カッコ・大カッコは「カッコ閉じる」も読むべきものなのか，や $|$ の部分をどう読むのかが分かりません． **お答え：**「意味」を考えて読むのがよいと思います．カッコの開く・閉じるが重要だと思ったら読めばよい．ご質問の例は “the set of (x_1, x_2), where x_1 and x_2 are real numbers” と読めばよいのでは?

質問： 無限大は実数ではない（$-\infty$ や $+\infty$）という話で，自然数の数は無限大 $\to$ 自然数の数は数ではない?

お答え： 数ではありません．

質問： 今日授業で「実数とは数直線上にめもれる数」とおっしゃっていましたが，虚数はどうやって書き表すのですか? 線形代数の方で複素数平面をやりましたが，やはり間接的に表すしかないのでしょうか.

お答え： 複素平面に表すのは十分直接的だと思いますが.

質問： 高校の辞典では $\int e^{-x^2}\,dx$ の計算ができないといわれましたが，実際には積分の始点と終点がなんであっても求められるものなのですか?

お答え： まず $\int_a^b e^{-x^2}\,dx$ は，任意の a, b に対して存在します．しかし，それを a と b のよく知られた式（高等学校で学んだ具体的な関数＋ α の組み合わせで得られる関数；初等関数という．第 4 回に扱う）で表すことはできないことが知られています（証明されています）．このあたりの事情は第 9 回に説明します.

質問： $-\infty$ から ∞ への積分は 1 年生のうちにできるようになりますか? **お答え：**提示資料の目標 3 程度はやります.

質問： 閉区間と開区間の違いがイマイチピンときませんでした．この 2 つを区別することにどのような意味を持ちますか? （原文ママ：「区別することは」か？）/ $\to$ この矢印と $\mapsto$ この矢印の違いがいまいちよくわからないです.

お答え： 「イマイチ」というのは「いまひとつ」とういことなので，ある程度のところまではピンと来ていると思ってよいでしょうか．どの程度のところまでわかっているのかをお伝えいただけないとお答えできません.

質問： 偏微分は何に使うのですか. **お答え：**至るところ．講義での提示資料の最初を見よ．なお，この質問は，理工系の大学生にとって「掛け算九九は何に使うのですか」という質問と同等.

質問： 中間テストまでの授業内容の中で田中光太郎（原文ママ：山田光太郎です．ぜひ覚えてください）先生は個人的にどこが一番考えるときにおもしろいですか? そこを目指して頑張りたいので教えてほしいです.

お答え： 掛け算九九は何の段がいちばん面白いですか? この科目は「基礎科目」ですので，面白くても面白くなくても知らなければならないことを学びます.

質問： 高校とは違って難しそうだと思いました．今回用語について説明していましたが，やってればそのうち覚えるものなんですしょうか．それとこの紙で出欠の確認をとっているといことなんでしょうか?

お答え： よかった．大学まできて簡単なことをやるんじゃ萎えますよね．用語になれるかどうかは「言葉に気をつけて」読み書きをするかどうかにかかっています．出欠はとりません．講義概要を再度熟読してください.

質問： 問題 1-8：高さが c としたとき $c = 1$ のような式を $(x - y)^2 = 0$ のようにきれいな形に変形できる高さの等高線はかけますが，他の場合がよくわかりません．x か y のどちらかを固定してプロットしていくのでしょうか.

お答え： この問題については，問題 1-4 の $f(a, ma)$ の値がヒントになります.

質問： 問題 1-3, 1-7 が分からなかったです. **お答え：**どこまで考えてどう分からなかったのか教えてください.

質問： FireFox はほかのにくらべてどんな特徴がありますか. **お答え：**他の「何」ですか?

質問： 第 1 回 p. 3, l 8 “負でない” $\to$ “正の” と表記することは可能ですか.

お答え： いいえ．講義ノート 2 ページ, 脚注 9.

質問： 問題 1-3 の，身の回り量にはどのようなものがあるのでしょうか? よく分かりませんでした.

お答え： 講義ノート例 1.5, 1.6.

質問： 1-6（原文ママ：問題 1-6 のことですよね）は，実数 c を任意の 1 つの実数だと考えれば，等高線が正しいことは証明できますが，それと等高線が示す高さだけでグラフが正しいと言っても良いですか.

お答え： グラフが大体こんな形と納得できればよい．「こういう図になる」のは証明すべきことではないですよね.

質問： プリントよんだら予習のときは教科書はよまなくて OK ですか? **お答え：**多分．必要なときは指示します.

質問： プリントに演習問題があってとても勉強しやすいです．私は類題をたくさん解く中で数学をやっと理解するような頭のよくない人間なのですが，本屋には問題集が何種類もあります．おすすめのものなどがありましたらお教えください．/ 復習に関して，どの演習書を買えばよいのか，演習書の選び方のポイントを教えてほしい.

お答え： 10 冊くらいは手にとって，ある程度時間をかけて中身を見てください.

質問： 講義でノートはどれくらいとった方がよいですか? **お答え：**メモでよいのでは?

質問： 微積の授業で予習以外にしておくとよいものはありますか? **お答え：**復習.

質問： 今回の講義は線形代数と内容がかぶっている部分がいくつかありその部分は理解を深められたが，等高線というものがどのようなものなのかちゃんと掴むことができなかった．又，今回の関数についての説明を丁寧にされていたが，高校のころの知識を超えた部分がどこであったかわからなかった.

お答え： 等高線が掴めないのだから，高校の知識を超えているのでは? 掴めなくても定義を理解して運用できればよい.

質問： ボクは関数をグラフにしないとイメージがつかめません．このままだと死をむかえることになるでしょうか?

お答え： はい.

質問： 教室は「暑」かったけど，それ以上に先生の数学への思いは「熱」かった. **お答え：**だれがうまいこといえと.