微分積分学第一 (3)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2014/calc1/

2014.04.23 (2014.05.28 **訂正**)

1 変数関数の微分係数の意味

- $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$: a から $a+h$ までの f の値の**変化率**
- $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$: a における f の**瞬間の変化率**
- $f'(a)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$: a における f の**微分係数**
- f のグラフの $(a, f(a))$ における**接線の傾き**は $f'(a)$ である．

「グラフの接線の傾き」は微分係数の「ひとつの意味」
それが全てではない．

例 2.1 (3)：

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}x & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2} & (x\neq 0)\\ \dfrac{1}{2} & (x=0)\end{cases}$$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(h\sin\frac{1}{h}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\quad \text{(はさみうち)}$$

- $x=0$ で定数だから $f'(0)=0$ では? No
- $\lim_{x\to 0} f'(x)$ は存在しないので 0 で微分不可能? No
- 0 で微分可能だが，導関数が 0 で連続でない例

問題 2-1

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$

- $0/h$ は不定形ではないか? No (高等学校で習ったことによる)
  極限値をとる前に式の値を計算してから極限をとる
  定数関数の微分係数は 0 であることのの証明

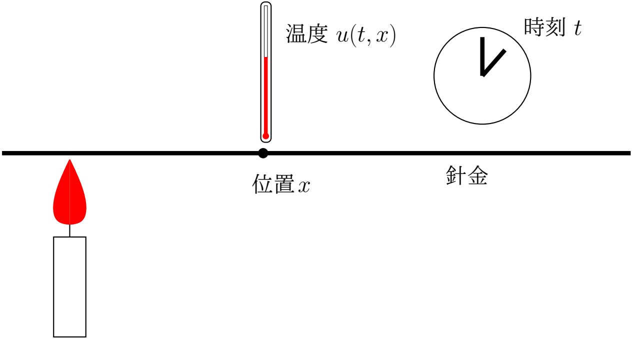
問題 2-7

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

$$\begin{aligned}f_{xy}(0,0)&=\frac{\partial f_x}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{-h^5/h^4}{h}=-1\\ f_{yx}(0,0)&=\frac{\partial f_y}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=1\end{aligned}$$

問題 2-2: 熱方程式



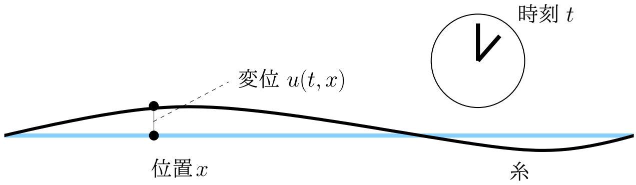
$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

問題 2-2: $\mu = 1$ の場合

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

グラフ

問題 2-3: 波動方程式



$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

問題 2-3: $c = 1$ の場合

- $u(t,x) = \sin(t+x)$ 図 a
- $u(t,x) = \sin(t-x)$ 図 b
- $u(t,x) = \sin(t+x) + \sin(t-x)$ 図 c

問題 2-4: 2 変数の調和関数

$f(x,y)$ **が調和関数** $\Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

- $f(x,y) = a\log(x^2+y^2) + b \qquad (a,\ b$ **は定数**$)$
- $f(x,y) = ax + by + c \qquad (a,\ b,\ c$ **は定数**$)$

3 次以下の多項式で表される関数：

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 && (3\text{ 次の同次多項式}) \\
&\quad + px^2 + qxy + ry^2 && (2\text{ 次の同次多項式}) \\
&\quad + mx + ny + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{xx} + f_{yy} &= 2(3a+c)x + 2(3d+b)y + 2(p+r) = 0 \\
&\Leftrightarrow c = -3a, \quad b = -3d, \quad r = -p \\
&\Leftrightarrow f(x,y) = a(x^3 - 3xy^2) + d(y^3 - 3x^2y) \\
&\qquad\qquad + p(x^2 - y^2) + qxy + mx + ny + C.
\end{aligned}
$$

問題 2-5: 3 変数の調和関数

$f(x,y,z)$ **が調和関数** $\Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$

- $f(x,y,z)=\log\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ **は調和関数ではない．**
- $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ **は調和関数である．**
- $F(r)=\dfrac{1}{r}\Rightarrow f(x,y,z)=F\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ **は調和関数**

$f(x,y,z)=F(r)$ $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ **とする**

$$f_x=\left(\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)F'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{xF'(r)}{r}$$

$$f_{xx}=\frac{(y^2+z^2)F'(r)+x^2rF''(r)}{r^3}.$$

$$f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=F''(r)+\frac{2}{r}F'(r)=0\Leftrightarrow\frac{1}{r^2}\left(r^2F'(r)\right)'=0$$

$$\Leftrightarrow r^2F'(r)=-a\Leftrightarrow F(r)=\frac{a}{r}+b$$

問題 2-6: 極小曲面

Fact

与えられた境界をもつ曲面のうち面積最小の曲面は極小曲面である．

- $f(x, y)$ **のグラフ：カテノイド（懸垂面）の上半分**
- $g(x, y)$ **のグラフ：シャーク曲面**

- GANG Gallery of minimal surfaces:
  http://www.gang.umass.edu/gallery/min/
- Virtual Math Museum (3D-Xplor-Math):
  http://virtualmathmuseum.org/Surface/gallery_m.html
- Minimal Surfaces (S. Fujimori@Okayama):newline
  http://www.math.okayama-u.ac.jp/~fujimori/min_surf/index.html