微分積分学第一 (4)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2014/calc1/

2014.04.30 (2014.05.14 **訂正**)

お知らせ

- **提出用のポストは，原則として木曜日 13 時過ぎくらいに開きます．**
  それ以降は翌週まで放置されます．
  古い日付の入った提出用紙は 0 点として処理します
  日付はきちんと入れて下さい

- **来週 5 月 7 日は月曜日の時間割です．**
  したがって次回は 5 月 14 日になります．

ご意見から

ご意見： 定義を全て暗記するのは大変そうです．

コメント： そうですね．「この用語は定義がきちんとある語」ということと「どこを見れば定義があるか」ということだけはきちんと覚えておいて欲しい．

ご意見： 物理への偏微分の活用例がたくさん紹介されて，物理に対する不安がふくらみました．

コメント： 「社会での掛け算九九の活用例がたくさん紹介されて，社会に対する不安がふくらみました」
東工大生にとって，この文と同じ意味．

質問と回答

質問： 2 変数関数ではある点での増減を考えることは無意味であると言っていましたが，1 変数関数で座標をとるように 2 変数関数でも例えば緯度経度 0° の地点から方向の基準をとれば増減は相対的でなく把握できると思ったのですが，違いますか?

回答： この考えだと $f(x, y) = 2x - 3y + 1$ は $(0, 0)$ で増加ですか？減少ですか？

質問： 2 変数関数の微分可能について，1 変数関数の微分可能と同じように考えて移動した距離で割るなら $\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ で $h \to 0,\ k \to 0$ とすればいい気がするんですが，何がいけないんでしょうか．

回答： $f(x, y) = x - y$ としたとき質問の式の極限値は存在しない．つまりこの定義では 1 次関数は微分可能でない．

質問と回答

質問： 何故 C^1-級や C^n-級のような記号を使うのですか．1 回導関数は微分可能（原文ママ）と書けばよいと思う．

回答： 「書けばよい」ことが違っています．
正しくは「偏導関数が存在してそれらが連続」．
ところで，これは「なぜ正三角形っていうんですか．3 つの辺の長さが互いに等しい三角形って書けばよいと思う」という質問と同じですね．

質問： $f(x,y)$ があったときに，f_x, f_y はどのように役に立つのか．

回答： 講義資料 3, p. 5, 下から 14 行目

Q: 偏微分は工学の分野においてどのくらい役に立ちますか．

A: 大変に．この問いは，皆さんにとって掛け算九九は日常生活でどれくらい役に立つか，という問いと同等です．

3-1（例 3.12）1/2

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}h^2\sin\frac{1}{|h|}=0,$$

$$f_y(0,0)=0$$

$$\frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$=\sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\to 0 \qquad (h,k)\to(0,0)$$

したがって $(0,0)$ **で微分可能**

3-1（例 3.12）2/2

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

$(x_n, y_n) = (1/(2n\pi), 0)$ $(n = 1, 2, \dots)$ **とすると，**
(x_n, y_n) **は** $(0,0)$ **に近づくが，** $n \to \infty$ **で**

$$f_x(x_n, y_n) = 2n\pi\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1 \to -1 \neq f_x(0,0)$$

なので f_x **は原点で連続でない．**

例 1

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

部分分数分解

$$\frac{1}{(x-2)(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

$$A = \frac{1}{5}, B = \frac{-1}{80}, C = \frac{-3}{16}, D = \frac{-1}{4}.$$

例 2

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \log\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|$$

$$\frac{dx}{\cos x} = \frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x} = \frac{du}{1-u^2} \qquad (u = \sin x)$$

$$\frac{dx}{\cos x} = \frac{2\,dt}{1+t^2}\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2\,dt}{1-t^2} \qquad \left(t = \tan\frac{x}{2}\right)$$

正割・余割・余接（25 ページ)

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$\sec x = \cos^{-1} x$ **とは書かない**

例 3

$$\int \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{1}{2}\tan^{-1} x$$

$$\frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)$$

逆正接関数（26 ページ）

$$y = \tan^{-1} x \iff x = \tan y, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x$$

例 4

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int (x)'\sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$
$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x\right)$$

逆正弦関数（26 ページ）

$$y = \sin^{-1} x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sin y, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$
$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$$

例 5

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \sec u \, du = \frac{1}{2} \log \frac{1+\sin u}{1-\sin u} \\
&= \frac{1}{2} \log \frac{\sec u + \tan u}{\sec u - \tan u} = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \\
&= \int \frac{\cosh v \, dv}{\sqrt{1+\sinh^2 v}} = \int dv = v = \sinh^{-1} x
\end{aligned}
$$

$$x = \tan u \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = \sinh v$$

双曲線関数（28 ページ）

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x, \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

例 6

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \int (x')\sqrt{1+x^2}\,dx \\
&= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)
$$

$$
\int \log\ dx = \int (x)' \log x\,dx = x\log x - \int dx = x(\log x - 1)
$$

$$
\begin{aligned}
\int \tan^{-1} x\,dx &= \int (x)' \tan^{-1} x\,dx = x\tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \\
&= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)
\end{aligned}
$$

$$
\int \sin^{-1} x\,dx = \int (x)' \sin^{-1} x\,dx = x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx
$$

例 7

$$\int \frac{dx}{1-x^3} = \frac{1}{3}\left(-\log|1-x| + \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) \right.$$
$$\left. + \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^3} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{x+2}{1+x+x^2}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{1+x+x^2}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\frac{2x+1}{1+x+x^2} = \left(\log(1+x+x^2)\right)'$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}\right)$$

例 8

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(2\tan^{-1}(1+\sqrt{2}x) - 2\tan^{-1}(1-\sqrt{2}x) + \log\frac{1+\sqrt{2}x+x^2}{1-\sqrt{2}x+x^2}\right).$$

$$\begin{aligned} 1+x^4 &= (1+x^2)^2 - (\sqrt{2}x)^2 \\ &= (1+\sqrt{2}x+x^2)(1-\sqrt{2}x+x^2) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}x+x^2} - \frac{x-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}x+x^2}\right)$$