2014 年 4 月 30 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 4

前回の補足

- 第 2 回の問題へのコメント（提示資料）で，“exp” という記号を説明なしに用いました．$\exp x = e^x$ です．とくに e の肩に複雑な式をのせるときは，exp を使った方が目に易しいのでよく使われます．
- 微分可能性の定義（定義 3.6）についての補足：
  - $\sqrt{h^2+k^2}$ は何か，というご質問が複数．座標平面上の点 (a,b) と $(a+h,b+k)$ の間の距離です．
  - A, B をうまく選ぶ，という部分が分かりにくいようです：勝手な実数 A, B に対して $\varepsilon_{A,B}(h,k) := \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-Ah-Bk}{\sqrt{h^2+k^2}}$ とおいて，極限 $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_{A,B}(h,k)$ を考えます．数 A, B を選ぶごとにこの極限は存在したり存在しなかったりしますが，特別な A, B をとると 0 に収束する，というのが微分可能性．
  - そんな A, B をどう見つけるかというのが命題 3.7．この命題から (1) f が (a,b) で偏微分可能でないならば微分可能でない．(2) 偏微分可能なら，(a,b) で微分可能であるための必要十分条件は $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ が成り立つこと．
  - 定義の最後の項で $\varepsilon(h,k)$ に $\sqrt{h^2+k^2}$ をかける理由：$(h,k)\to(0,0)$ と $\sqrt{h^2+k^2}\to 0$ は同値．定義式の最後の項は (a,b) と $(a+h,b+k)$ の距離にくらべて「さらに早く小さくなる」を要求します．すなわち $\sqrt{h^2+k^2}$ でわってもまだ 0 に近づく部分が残る，ということです．後期にもう少しきちんと扱います．
- C^k-級の C は “continuous” の意味です．
- 3 次偏導関数の順序交換について：例えば “f_{xxy} と f_{xyx} がともに存在し，かつ連続ならばこれらは等しい”．これは関数 f_x に定理 3.13 を適用すればわかる．特に f が C^3-級なら 3 回微分までの順序交換は自由にできる．

前回までの訂正

- 講義資料 3, 1 ページ下から 9 行目：接平面の法線ベクトル ⇒ 等高線の法線ベクトル
- 講義資料 3, 3 ページ 1 行目：割るイカン数 ⇒ 悪い関数
- 講義ノート 18 ページ 2 行目：h_n ⇒ k_n
- 講義ノート 20 ページ 6 行目：とるれる ⇒ とれる
- 講義ノート 25 ページ脚注の日付：2013 年 ⇒ 2014 年
- 講義ノート 27 ページ脚注 8：ただし冪乗根，非整数幂 x^α の定義域は正の実数としておく．
  ⇒ ただし冪乗根 $\sqrt[n]{x}$，非整数幂 x^α の定義域は $\{x \mid x>0\}$ としておく．

授業に関する御意見

- マイクの音量を上げてください． **山田のコメント：** 了解.
- 問題の解答がほしいです/プリントの「問題」について，解説は付属していなくてよいので答だけでも印刷してほしいでいす． **山田のコメント：** さがしてごらん.
- この質問用紙のありがたみが分かってきました． **山田のコメント：** でしょ.
- 数式をプリントに書き込むのに使っているのは何のソフトですか．個別指導のアルバイトでプリントを作るのにワードを使ってるのですが，面倒です.
  山田のコメント： TEX．適切なクラスファイルをつくってやればこれが一番はやい．ちなみにエディタは Emacs.
- 次回の授業で少し今回の授業のおさらいを入れていただけるとありがたいです． **山田のコメント：** 問題へのコメントという形でいつもどおり入れます.
- 少し難しかったので，次の授業が 3 週間後ということを利用してじっくり復習しておきたいです． **山田のコメント：** **1 週間後**ですが.
- 変な形のグラフってステキです． **山田のコメント：** たとえば？
- 予備校で，微分可能 ⇔ 導関数が連続と書いてしまい，注意されました．「大学で習う関数は性質の悪いものも多いから，定義にちゃんと従いなさい」と．今日沢山出て来た “変態” がその類なのでしょう．これからも “変態” 関数に出会うのが楽しみです． **山田のコメント：** 変態をよろしく.
- 定義を全て暗記するのは大変そうです． **山田のコメント：** そうですね.「この用語は定義がきちんとある語」ということと「どこを見れば定義があるか」ということだけはきちんと覚えておいて欲しい.
- 先生はヘンタイだと思います． **山田のコメント：** なんでわかったんですか?
- ∞ のとらえ方が難しかったです． **山田のコメント：** そう? 漠然と「限りなく大きい」というより，言葉にするのはずっと易しいと思いますが.
- 物理への偏微分の活用例がたくさん紹介されて，物理に対する不安がふくらみました.
  山田のコメント： 「社会での掛け算九九の活用例がたくさん紹介されて，社会に対する不安がふくらみました」東工大生にとって，この文と同じ意味.
- 新しい内容でしたが，なんとかあらすじはわかった気がします． **山田のコメント：** 今回はあらすじで ok．ところで，授業は基本的に新しい内容なのでは?
- log → 10g は衝撃的でした． **山田のコメント：** ですよね.
- 微積の教科書の中に山田先生の名前を見つけました． **山田のコメント：** え，どこどこ
- どんな質問が 3 点になるのですか. . . ? 全く想像がつきません． **山田のコメント：** デフォルトは 2．Unique なこと，頭を使ったことが読み取れること，質問が文として成立していることが必要.
- 今回は授業中の記憶が連続になりませんでした．次は頑張ります（笑）/特にありません． **山田のコメント：** me, too.
- ちょっと部屋の温度が低かったです（4 月 16 日分）． **山田のコメント：** 場所によるようです．場所を選ぶか，かるく羽織るものを持ってきていただくのがよいかと思います.

質問と回答

質問： 高校の時数 II か何かで「この領域を図示せよ」という問題をよくやりましたが，その時，解答で「図の斜線部分（境界を含む）」と書くことがありました．今日の講義では領域には境界はないとおっしゃっていましたが，高校までの領域と大学からの領域は定義が違うということでしょうか．くだらない質問ですみません．

お答え： くだらなくありません．すくなくともこの授業では高等学校で使った言葉の意味と違った意味で使います．

質問： 領域が“ひと続きで端をもたない”という意味であることは，境界をもたないので，境界として存在する点は極限がないのでしょうか．それとも領域の内外からどのような経路をとっても極限が存在するようになっているのでしょうか．講義では，領域の内外から近づけても極限が定義できるようにするために境界をもたない先生はおっしゃっておられましたが，境界を含む，含まないで極限が定義できるか否かは，領域内からしか近づけないことになっているからなのでしょうか． **お答え：**「境界として存在する点は極限がない」の意味がわからない．(x, y) が境界の点に近づく極限は考えない，ということ．考えている領域が「関数の定義域」なので，その外側では関数は定義されていないので，領域の内外から近づけることはできない．

質問： 領域について，境界がない理由は分かりましたが，ひとつづきでなければならない理由が分からないので，教えて下さい．境界がないので領域がわかれているという概念がないからですか?

お答え： 1 変数関数の場合に定義域を区間（数直線上のひと続きの部分）と考えるのと同じです．

質問： 領域で境界を考えなければならなくなる場面てありますか． **お答え：**「領域」は境界を含まない（定義）．

質問：「$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が領域であるとはそれがひと続きで端をもたない」が分かりません．部分集合なら端（←「終わり」ということ）がある気がします． **お答え：**例えば，開区間 $(0, 1)$ は端をもたないと考えます．0 や 1 は境界の点だが，$(0, 1)$ に含まれていないから．同様に，座標平面の上半分 $\{(x, y) | y > 0\}$ は端をもたない．実際，境界は x 軸だが，それはこの集合に含まれない．なお，「部分集合なら端がある」のは変．$\mathbb{R}^2$（$\subset \mathbb{R}^2$）に端がある?

質問： p. 17 の極限のところで「$\mathbb{R}^2$ の領域 D から D の点 (a, b) を除いた領域で定義された 2 変数関数 f が」とあります．関数 f が (a, b) を除いた領域で定義されるのは当然ですが，(a, b) で定義されていても問題ないですよね．

お答え： 問題ありません．

質問： (x, y) がどのような経路で (a, b) に近づいてもとありますが，斜め方向から近づくときとかはどのように定義されるのですか? **お答え：**定義という語に違和感を覚えますが，例えば例 3.3 (1) は斜めから近づけています．

質問： なぜ 0 に近い値を表現するのに $\frac{1}{2n\pi}$ や $\frac{1}{(2n+1)\pi}$ の $n \to \infty$ の極限値を使うのですか?

お答え： 文脈がわからないので，推測：例 2.1 (3) の f' に対して「$x \to 0$ のとき $f'(x)$ の極限値が存在しない」ことを示したい．それには x が 0 に近づく近づき方によって $f'(x)$ がいろいろな値に近づくことを言えば十分．例えば $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ とおくと，数列 $\{x_n\}$ は 0 に近づく近づき方を与える．このとき $f'(x_n) \to -\frac{1}{2}$．また $x'_n := 1/(2n+1)$ とおけば $f'(x'_n) \to \frac{3}{2}$．すなわち 0 **への近づき方によって** $f'(x)$ **は異なる値に近づく**．

質問： 例 3.3 の (3) で $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と表わすと，$x = \frac{1}{n}, y = \frac{1}{n^2}$, $n \to \infty$ や，$x = h, y = k$, $(h, k) \to (0, 0)$ のようにして $(x, y) \to (0, 0)$ とする経路が表せないと思うのですが，この例のやり方をどう解釈すべきなのですか． **お答え：**最初の例なら $r_n = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}$, $\theta_n = \tan^{-1}(1/n)$ とおくと $r_n \to 0$ になる．

質問： $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0, 0)$ が $f(x_n, y_n) = 1$ になぜなるんですか． **お答え：**文脈が不明．例 3.3 (1)?

質問：「$\lim_{x\to1} \log x = \log 1$ が成り立つのは $\log x$ が $x = 1$ で連続だから」(1) と説明していましたが，「$f(x)$ が $x = a$ で連続の定義は $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$」(2) とも説明しました．(1)，(2) を使って言いかえると「$\lim_{x\to1} \log x = \log 1$ が成り立つのは $\lim_{x\to1} \log x = \log 1$ が成り立つから」となります．これは $\lim_{x\to1} \log x = \log 1$ が成り立つことの証明としては不十分だと思います． **お答え：**「証明」とは言わず，こうしていい理由は，と述べたはず．実は，$\log x$ の連続性は別口で示すことができて，その結果 $\lim_{x\to a} \log x = \log a$ が成り立つということになっています．

質問： 2 変数関数ではある点での増減を考えることは無意味であると言っていましたが，1 変数関数で座標をとるように 2 変数関数でも例えば緯度経度 $0°$ の地点から方向の基準をとれば増減は相対的でなく把握できると思ったのですが，違いますか? **お答え：**この考えだと $f(x, y) = 2x - 3y + 1$ は $(0, 0)$ で増加ですか？減少ですか？

質問： 偏導関数とは，いわば 2 変数関数を地形に例えると「x 軸に沿って歩いたときの勾配（山田注：誤字，勾の代わりに均の旁が書いてあった）の変化のようなもの」ですよね？ x 軸でも y 軸でもない方向に歩いたとき（例えば $\binom{1}{1}$ の方向に）の勾配の変化を調べる微分というのはありますか?

お答え：「勾配の変化」は 2 回微分では? 標高の変化率，あるいは勾配ですね．ご質問の件，第 5 回に扱います．

質問： 2 変数関数の微分可能について，1 変数関数の微分可能と同じように考えて移動した距離で割るなら $\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ で $h \to 0$, $k \to 0$ とすればいい気がするんですが，何がいけないんでしょうか．

お答え： $f(x,y) = x - y$ としたとき質問の式の極限値は存在しない．つまりこの定義では 1 次関数は微分可能でない．

質問： 定義 3.6 の "定数 A, B をうまくとれること" という表現がよくわかりません．"$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ を満たすある定数 A, B が存在することと考えてよろしいでしょうか． **お答え：**そのとおりです．

質問： 定義 3.6 について，定数 A, B をうまくとるとは，具体的にはどのように計算していくのか． **お答え：**命題 3.7.

質問： （式省略，定義 3.6 の式）この式は $z = f(x,y)$ を $(x,y) = (a,b)$ で平面で近似している訳ですね?

お答え： グラフを平面で近似していることになります．

質問： 3 変数以上の関数でも微分可能であるというのは定義 3.6 のように考えるのですか? **お答え：**はい．

質問： 授業内で出て来た「Ah は小さく $\varepsilon(h)$ はもっと小さい」という言葉が $f(a+h) - f(a) = Ah + \varepsilon(h)h$ にどう結びついているのかが分かりません． **お答え：**$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ ならば，$h\varepsilon(h)$ は h にくらべてもっと早く 0 に近づく．さらに $h\varepsilon(h)/(Ah)$ は $h \to 0$ のとき 0 に近づくから，h が小さい時は $h\varepsilon(h)$ は Ah よりずっと 0 に近い．

質問： 偏微分可能は連続と関係ありませんが，微分可能以外で連続と関係がある $\sim$ 微分可能の $\sim$ に入る言葉はありますか． **お答え：**C^1-級なら連続ですよね．講義でコメントした言葉でいえば「一回連続微分可能ならば連続」．

質問： 「C^1-級 $\Rightarrow$ 微分可能 $\Rightarrow$ 偏微分可能」と「C^1-級：偏微分可能かつ f_x，f_y がそれぞれ連続」とありました．偏微分可能と C^1-級ではどちらも判明していないとき，どう考えてこれらを導くことができるのでしょうか．

お答え： 「これら」は何を指しますか? 最初の「」は 「C^1-級を仮定すると微分可能性が導ける」「微分可能性を仮定すると偏微分可能性が導ける」なので，「どちらも判明していないとき」という条件の意味が通じない．後半は C^1-級の定義なので「導く」ということはできません．

質問： C^2-級 $\Rightarrow$ C^1-級が成立することを示すにはどうすればいいでしょう．

お答え： C^2-級ならば f_{xx}, f_{xy} が存在し，それらは連続，すなわち関数 f_x は C^1-級だから命題 3.11 から f_x は微分可能で，したがって命題 3.8 より f_x は連続．同様にして f_y の連続性も言えるので f_x, f_y はともに連続，

質問： C^1-級の性質は $C^{(1\text{ 以上})}$-級，C^2-級の性質は $C^{(2\text{ 以上})}$-級も持っているのですよね? **お答え：**はい．

質問： f_{xy} を積分して元の関数と同じ次数の関数まで戻すには，y で積分してから x で積分しないとだめですか．順番は関係ありますか? **お答え：**第 8 回くらいでコメントしますが，f_{xy} から f は復元できません．

質問： $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ を計算して求めるとき $x \to 0$ の次に $y \to 0$ としても，$y \to 0$ の次に $x \to 0$ としても同じことですよね． **お答え：**いいえ．講義ノート 18 ページ，例 3.3 (2).

質問： $\lim_{y\to 0}\bigl(\lim_{x\to 0} f(x,y)\bigr) = \lim_{x\to 0}\bigl(\lim_{y\to 0} f(x,y)\bigr)$ となる時，何か特別な意味があるのですか． **お答え：**ないと思います．

質問： 3 変数関数の場合でも lim の下は $(x,y,z) \to (0,0,0)$ のように書きますか? **お答え：**はい．

質問： xyz は 3 次の多項式ですか? **お答え：**はい．3 変数の 3 次以下の多項式の一般形を書いてみましょう．

質問： 自分がどこを理解できていないのかが解りません．C^2-級であるなら $f_{xy} = f_{yx}$ であるということは面白いと思いました．つまり f_{xx} や f_{yy} が定数であっても，連続性があれば $f_{xy} = f_{yx}$ ということですか?

お答え： ご質問の意味がわかりません．「つまり f_{xx} や f_{yy} が定数であっても」の部分の意図が読み取れません．なぜ「つまり」のあとに「...が定数」がくるんでしょう．「つまり」とは前に書いたことの言い換えのはず．

質問： C^1 の読み方は「シーいち」と「シーワン」どちらですか? 私の聞き間違いでなければ両方言っていた気がしたので，教えていただきたいです． **お答え：**どちらも使う．授業では "「シーワン，シーに」はおかしい" といった．

質問： "変態くん" と言う場合と "変態さん" という場合がありましたが違いは何ですか? **お答え：**ない．

質問： C^∞-級 $=$ 任意の k に対して C^k-級とありましたが，k は負でない整数であることを補足する必要があると思います． **お答え：**もちろんです．文脈から自明と思われるので黒板には書きませんでしたが，口頭で補足しました．

質問： C^∞-級は任意の自然数 k において C^k-級だということでしたが，これが ∞ に微分（原文ママ）して連続との違いがわかりません． **お答え：**「∞ に 微分 して」が意味不明．"$f(x) = \cos x$ を ∞ に微分する" とどうなる?

質問： どうして C^∞-級ばかりを考えるのですか? 変態楽しみにしています．

お答え： (1) 応用上よく使われるから．(2)「微積分」が有効なツールになるのはこのような場合だから．

質問： 何故 C^1-級や C^n-級のような記号を使うのですか．1 回導関数は微分可能（原文ママ）と書けばよいと思う．

お答え： 「書けばよい」ことが違っています．正しくは「偏導関数が存在してそれらが連続」．ところで，これは「なぜ正三角形っていうんですか．3 つの辺の長さが互いに等しい三角形って書けばよいと思う」という質問と同じですね．

質問： C^∞-級という条件は数学以外で用いられることはあるのですか? **お答え：**大抵は暗黙のうちに仮定されている．

質問： この授業とはまた別の授業の話ですが，微分を表すときに $\frac{\partial f}{\partial x}$ ではなく $\frac{df}{dx}$ と書かれていたのですが，その授業

で $\frac{\partial f}{\partial x}$ と書いたら不自然なのでしょうか.　**お答え：**文脈がわからないのでお答えできません.

質問： 例えば関数 f のグラフを下のようにする（図省略：1 変数関数のグラフで，$x=1$ のところに角がある）. $x<1$ の範囲において微分可能とすると『$x<1$ の範囲において関数 f は C^1-級』であるというのでしょうか.

お答え： 質問の意味がわかりませんが，微分可能だからといって C^1-級とは限りません（授業の最初に説明した例）.

質問： $f(x)=\sin xe^x$ が $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}=2\cos xe^x$, $\frac{\partial^4 f(x)}{\partial x^4}=-4\sin xe^x$ となったのですが，$f(x)=-c^2\frac{\partial^4 f(x)}{\partial x^4}$ って何かの方程式とかになりますか?　**お答え：**対応する現象は浅学のため知りません．ところでなぜ偏微分?

質問： 問題 2 の 2-2 の解答に関して，授業ノートには x に関する偏動関数（原文ママ：偏導関数?）だけが書かれてあったのですが，y に関する偏動関数は求めなくてもよいということですか．その場合は理由も教えて下さい．あと問題 2 の 2-7 の解答に関して，授業ノートには 2 次偏導関数（原文ママ：これは正しい）が f_{xy} と f_{yx} だけしか求められていないのですが，f_{xx} や f_{yy} は求めなくてもよいのでしょうか．これについても同様に理由も教えて下さい．　**お答え：**前半：もちろん両方とも求めなければなりません．一つを求めればもう一つも同様なので授業ではやっていないだけ．後半：講義では偏導関数を求めていません．$(0,0)$ における 2 次偏微分係数のうち $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ を求めただけ．もちろん，問題は，すべての 2 次偏導関数を求めることです.

質問： どうして調和関数について詳しく触れなかったのですか.　**お答え：**それだけで 1 学期分は使えるから.

質問： $f_{xx}+f_{yy}=0$ となるような調和関数を求めることの意味がいまいちわからない（4 月 16 日分）.

お答え： 「いまいち」に注意：講義資料 2, 6 ページ 10 行目．$f_{xx}+f_{yy}=0$ は 2 変数が調和関数であることの定義ですから，「$f_{xx}+f_{yy}=0$ となるような調和関数」は「2 で割り切れる偶数」と同じくらい違和感があります.

質問： $f(x,y)=$ (略, 例 3.3 の (1)) の分子に「2」があるのはなぜですか.「2」が無くても十分に変態なのではないのですか.　**お答え：**もちろん．極座標 $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ で表すと綺麗に $\sin 2\theta$ となるので 2 をつけている.

質問： 授業内容の範囲の教科書（微分積分講義）の誤りを見つけましたので指摘します（以下略）

お答え： ありがとうございます．なお，公式正誤表（授業 web ページにリンクあり）もご覧ください.

質問： 定義を把握してから授業に臨むべきですか.　**お答え：**ざっとは把握しておいたほうがよいと思います．いずれにせよ言葉の意味に対して共通の理解がなければ会話や議論はできません.

質問： 授業内で出てくる定義，定理，事実 (fact) は，あいまいさを残さず覚えるべきですか? また定義などを覚えることで具体的な問題を解けるようになりますか?　**お答え：**覚え方による.

質問： 授業内でのストーリー展開があまり読めないのですが，ストーリーを意識して授業をして下さっているのか教えて頂きたいです.　**お答え：**もちろん意識しています．全体をみてストーリーを読み取るには努力が必要ですね.

質問： 偏微分する意味っていつ分かりますか．説明したけど私が理解していないだけでしょうか/ 2 変数関数の偏微分可能性ならともかく微分可能性を考えることにどんな意味があるのでしょうか?　**お答え：**第 5 回

質問： 方向微分可能とはどういうことですか?　**お答え：**第 5 回

質問： $f(x,y)$ があったときに，f_x, f_y はどのように役に立つのか.　**お答え：**講義資料 3, p. 5, 下から 14 行目を見よ

質問： C^∞-級でない関数にはどのようなものがありますか?/ C^∞-級でない 2 変数関数を扱うのはいつごろですか.

お答え： 例 3.5, 例 3.12

質問： 数学科でない限り $f_{xy}\neq f_{yx}$ であるような 2 変数関数に出会うことはありませんか.　**お答え：**問題 2-7.

質問： C^1-級でも微分可能でないようなものは，どのような関数ですか.　**お答え：**存在しません．命題 3.11.

質問： $0^0=0$ はなぜですか? また，先生は $\frac{0}{0}$ でなく 0^0 こそ不定形だとおっしゃいましたが，それはなぜですか? $\frac{0}{0}$ も不定形だと思うのですが.　**お答え：**言っていないことを聞かない．$0^0=0$ ではない．“$\frac{0}{0}$” も “0^0” も不定形.

質問： 授業で少し話していた，割り算のとき 0 で割ってはいけないことの証明について質問です．仮に 0 で割ることが可能だとすると，$x=\frac{a}{0}$ （x, a は実数）と書ける．両辺に 0 をかけると $x\times 0=a$ $\therefore a=0$ となり，x は任意の実数となるが，最初の仮定より $x=\frac{a}{0}$ と定まることと予盾（原文ママ：矛盾のことか）するので 0 で割ることはできない（証明終わり）という証明で正しいでしょうか.

お答え： 「0 で割れない」というのは，割り算の定義から.「0 で割る割り算は定義しない」というのが実際です．したがって「0 で割れないことを証明する」というのは違和感があります．授業で「0 で割ってはいけない理由」と曖昧に言ったのはそれが理由.「$\therefore a=0$」にも違和感があります．与えられた a を 0 で割ることができないことを言いたいのだから，議論の途中で（あなたの都合で）a の値を変更してはいけないのではないでしょうか.

質問： ハイフンとマイナスの書きわけ方を教えて下さい.　**お答え：**A-B (hyphen), A−B (minus),A—B (dash).

質問： この紙にかかれた質問は全員分答えているのですか.　**お答え：**大体．多いものは「前回の補足」に.

質問： 例年何人くらい「微分積分第一」の単位を落とす方がいるのでしょうか?　**お答え：**10% 程度.

質問： 全体的にイマイチわかりませんでした．ヤバい.　**お答え：**そりゃやばい.