微分積分学第一 (5)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2014/calc1/

2014.05.14

提出物について

- 提出用紙のフォーマットを少しだけ変更しました
  ここ
- 提出物の日付は「提出日直近の授業の日付」として下さい．
- 質問内容などの対象は，それまでの授業全てです．
- 質問への回答は講義資料にあげています．
  目を通すことを前提にして授業をしています．

ご意見から

ご意見： 今回の授業はいつもより声が小さかったので少しだけ大きくしてくれるとうれしいです

コメント： 申し訳ありません．疲れているかもしれません．

ご意見： 問題の解答がどこに載っているかやはり分からないです．URL とかあったら教えて下さい．

コメント： URL は講義 web ページと同じ．OCW のどこかにもある．「解答をさがせ!」

ご意見： テストで証明問題はどれくらいですか?

コメント： 考えてません．
一般に証明問題の方が易しいのでたくさんだしてほしい，ということでいいですか?

ご意見： 変態には正せるものと正せないものがあるんですね．

コメント： そうなんですか？ 変態って正しくないんですか？

質問から

Q: オレはちょいと異端児な“変態”が世の中を動かすと思います．先生はどう思われますか?

A: そうかもしれませんが，
言葉が通じなかったらただのバカだよね．

Q: **整数**の -1 乗と $\sin^{-1} x$ や $f^{-1}(x)$ など同じ -1 でも**意味が違うのに違和感**がありますが，**変えるべき**ではないですか?

A:
- **なんで整数**?
- だれが変える？**（変えるような権力は存在しない）**
- 変える必要があるならじわじわ変わる．
  過去の蓄積を読めなければこまる**（なので覚えろ!）**
- 数学の言葉も**「文脈依存」**
  でも**日常言語の方がずっと複雑**：
  電話**魔**，メモ**魔**，のぞき**魔**
  通り**魔**

質問から

Q: 「hyperbolic cosine」なのになぜ「hcos」ではなく「cosh」なんですか．
問題文で「$\cosh x$」と「$\cos hx$」のようなまぎらわしい表現をありますか．

A: 後半は日本語が変ですね．
前半： cosinus hyperbolique (Fr), coseno hiperbólico (Es), coseno iperbolico (It) などラテン系の言語の語順です．
SI (Le Systéme International d'Unités, Fr) もそうですね．

Q: hyperbolic とはどういう意味ですか．

A: 現代の意味：hyperbola は双曲線（辞書にある）．手元の辞書には "1st use: 15th century" とあります．
語源："hyperbole (f) exaggeration" と手元のラテン語辞書にあります．"過剰である状態" という意味でしょう．
楕円 ellipse, 放物線 parabola とともに円錐を平面で切った切り口に現れる曲線です．Apollonius の "円錐曲線論" (紀元前 2 世紀くらい) で研究されています．Wikipedia

質問から

Q: $(\cot x)'$, $(\sec x)'$, $(\csc x)'$ の結果は暗記する方がいいですか?

A: すぐに答えが出せるならどうでも良い．すくなくとも $\cot x$ などの定義は暗記せよ．

Q: 今回でてきた積分の公式は全て暗記するべきですか? 自信がありません．

A: どれを公式と思っている？

Q: $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ など使用しても扱いやすくなるとは思えないのですが，どいった場面で扱いやすくなるのでしょうか．

A: あなたにとって扱いやすいかどうかは関係ない．
その記号を使う人がいるので，知らなければならない．

Q: $y = \sin^{-1} x$ などの記述になかなか慣れません．何度も計算してみるしかないのでしょうか?

A: 高等学校のとき $\cos x$ などの記述に最初から慣れていたわけではないでしょう．どうやって慣れましたか?

微分可能性

定義 (定義 3.6)

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ **で定義された関数** $f(x, y)$ **が** $(a, b) \in D$ **で微分可能であるとは，**$(a + h, b + k) \in D$ **となるような** (h, k) **に対して**

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \qquad (\star)$$

とおくと，

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$$

となるように定数 A, B **をうまくとれることである．**

命題 (命題 3.7)

関数 $f(x, y)$ **が** (a, b) **で微分可能ならば，**f **は** (a, b) **で偏微分可能で，**$(\star)$ **の定数** A, B **は** $A = f_x(a, b)$, $B = f_y(a, b)$ **でなければならない．**

微分可能性の条件

定理 (同値条件；定理 5.1)

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x, y)$ が $(a, b) \in D$ で微分可能であるための必要十分条件は，f が (a, b) で偏微分可能で，

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0,$$

$$\left(\varepsilon(h, k) := \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - f_x(a, b)h - f_y(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right)$$

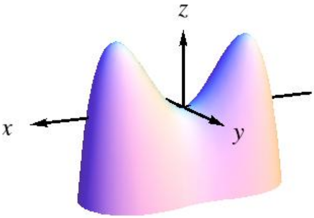
が成り立つことである．

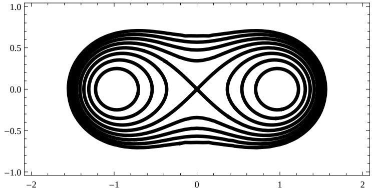
命題 (十分条件；命題 3.11)

領域 D で定義された 2 変数関数 f が
D の各点で偏微分可能，かつ偏導関数 f_x, f_y が D で連続 C^1-級
ならば f は D の各点で微分可能である．

偏微分と関数の変化の様子

$$f(x,y) = 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2$$





グラフ・等高線
等高線; **等高線アニメーション**

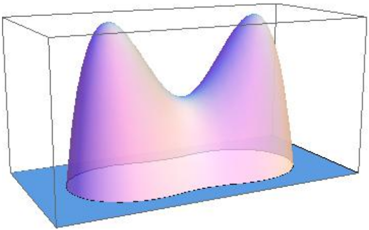
Cassinian Oval (Wikipedia) ; Domenico Cassini 1625–1712 (Wikipedia)
Lemniscate (Wikipedia) ; Jakob Bernoulli 1655–1705 (Wikipedia)

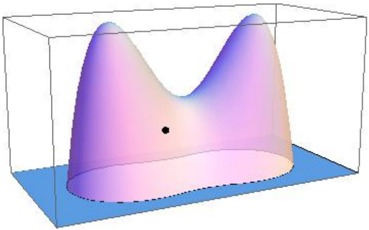
関数の変化

$$f(x,y) = 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2, \qquad P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad f(P) = -\frac{1}{4}$$

$$f_x(x,y) = \quad 4x(1 - x^2 - y^2), \qquad f_x(P) = \quad 1$$

$$f_y(x,y) = -4y(1 + x^2 + y^2), \qquad f_y(P) = -3$$





方向微分
方向微分（アニメーション）