2014 年 5 月 14 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 5

お知らせ

- 提出用紙の日付欄には，提出日の直近の講義の日付を書いてください．それ以前のものは「提出遅れ」とします．

前回の補足

- 双曲線関数について「なぜ cos や sin などと類似の記号を使うか」というご質問を複数いただきました．さまざまな「類似の性質」が成り立つからです．たとえば $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ は $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ に，加法公式 $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ も余弦の加法公式に似ています．
以下はもう少し深いレベルの説明：指数関数 $f(x) = e^x$ の変数 x は標準的な仕方で複素数にまで拡張できます（ここでは深入りない）．すると，とくに実数 t に対して $e^{it} = \cos t + i \sin t$ （オイラーの公式)，一般の複素数 $s + it$ (s, t は実数）に対しては $e^{s+it} = e^s(\cos t + i \sin t)$ が成り立ちます．これを用いると $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ なので，$\cosh x = \cos(ix)$, $\sinh x = i \sin(ix)$.
- マチンの公式はどうやって発見されたのですか，という質問が複数．歴史的なことは知りません（文献を調べていない）がこう考えれば自然な公式：$4\tan^{-1}\frac{1}{5}$ は $\tan^{-1} 120/119$ と，$\pi/4$ よりちょっとだけ大きい値になる．そこで $4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \beta = \frac{\pi}{4}$ となるような β を求めてみよう．このような β は $\tan\beta = \tan(4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \frac{\pi}{4})$ をみたすが，右辺を計算すると $1/239$ となる．
類題：$3\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{5}{99} = \frac{\pi}{4}$ であることを示しなさい．同様の問題をたくさん作りなさい．
- なぜ sec, csc, cot は高等学校で扱わないのか，というご質問も複数．“cos, sin, tan でなんとかなる”からと憶測します．実際には使う人がいるのでコミュニケーション・ツールとして知るべきですが．
- 語源に関する質問がありましたが，正確なところは知りません（きちんと文献をあたってないので）．cosine や cotangent の co は “associated with; together” を意味する接頭語．この文脈では余角 (complementaly angle; もとの角に足して直角となる角度) を表しているようです．cosine は余角の正弦．arc は「弧」．arcsin は正弦の値に対応する弧の長さ（すなわち角度）を求める演算です．
- 逆三角関数，双曲線関数のグラフは web に上げました．

前回までの訂正

- 黒板に書いた式: $\{\log|x-2|\,|x+3|\}' = \frac{-1}{x-2} + \frac{-1}{x+3}$. $\Rightarrow$ $\{\log|x-2|\,|x+3|\}' = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}$
- 双曲的正弦の逆を求めるための 2 次方程式を $X^2 - 2xX - X = 0$ と書いたもよう．$X^2 - 2xX - 1 = 0$ の誤り．
- 提示資料 (4) 11 ページ，下から 3 行目：$y = \sin^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \tan y \ldots \Rightarrow y = \sin^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y \ldots$
- 講義ノート 25 ページ，下から 4 行目：
$$\int \tan x\,dx = \log|\cos x|, \quad \int \cot x\,dx = -\log|\sin x|. \;\Rightarrow\; \int \tan x\,dx = -\log|\cos x|, \quad \int \cot x\,dx = \log|\sin x|.$$
- 講義ノート 26 ページ，下から 3 行目：$\alpha + \beta = \tan^{-1}\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$
- 講義ノート 30 ページ，上から 3 行目：$\dfrac{(-1)^N}{2N+3} \Rightarrow \dfrac{(-1)^{N+1}}{2N+3}$

授業に関する御意見

- もう少し音量を上げて下さい/ 今回の授業はいつもより声が小さかったので少しだけ大きくしてくれるとうれしいです/ 今日は先生のしゃべっている言葉が聞きとりずらかったです．マイクのせいでしょうか． **山田のコメント：** 了解．ちょっとつかれていたので声が小さかったかも．
- 実際の先生の動きとモニターに映し出された先生の動きが微妙にずれているので体調が悪いと酔います． **山田のコメント：** なるほど．どうしようもないですよね>スタッフの方．見方に工夫が必要?
- もうほんのすこし教室がすずしくてもいいかな，と思う． **山田のコメント：** たしかに少し暑かったような気がします．
- 講義資料の誤字って多いですね. . . 人のこと言えませんが. . . 反面教師として気をつけます!! **山田のコメント：** 山田の誤字なら：ごめんなさい．皆さんの誤字なら：そうですね．
- 変態には正せるものと正せないものがあるんですね． **山田のコメント：** そうなんですか？
- 今日は簡単に理解できるかと思ったら無理でした．もう一回高校のテキストを見なおしてみようと思います． **山田のコメント：** それもよいかもしれませんね．
- 積分計算は難しい. . . **山田のコメント：** よね． • たくさん計算します． **山田のコメント：** たのしいよね．
- 「火のないところに煙を立てます」がかなりつぼでした←日本語おかしいです．あと，殴ってからさすってもへこみはのこります．修理に出すくらいがいいと思います．
  山田のコメント： 「殴って修理にだす」にしますか？「殴って医者を呼ぶ」がいいですか？
- 今日でてきた積分計算をスムーズにするために，答えまで覚えているべきものなのでしょうか． **山田のコメント：** どうでしょう．山田は覚えていませんが．
- 緯度経度〜の質問の者です．全然理解していなかったのに食い気味な質問ですみませんでした．上り坂と下り坂の例えがとてもわかりやすかったです．
  山田のコメント： いいえ，理解していないことがわかる質問は貴重です．ネタにさせていただいてありがとうございました．
- $\frac{1}{(x-2)(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x-2} +$ (以下略) の A は両辺に $(x-2)$ をかけて $x \to 2$ とすれば求められるということを受験勉強のときには知らなかったので，このようなやりかたを知ることができてよかったです．ありがとうございました． **山田のコメント：** 受験テクニックのような気もしますがね．
- 無いです．後は僕が頑張るだけです．今の所． **山田のコメント：** よろしく．
- 数学は右上に -1 をつける表記をいろいろなとこで使いすぎです．頭がこんがらかります． **山田のコメント：** 自然言語よりましでは？
- 問題の解答がどこに載っているかやはり分からないです．URL とかあったら教えて下さい． **山田のコメント：** URL は講義 web ページと同じ．
- arc のような接頭後のようなものがつくとかっこいいです． **山田のコメント：** 接頭語です．
- テストで証明問題はどれくらいでますか? **山田のコメント：** 考えてません．

質問と回答

質問： p26 の例 4.3 の (1) が分かりません．(「ここで」から先のところ)．

お答え： 示したい式は $\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x = \sin^{-1} x$．左辺を y と書くと，「ここで」の前までで $\sin y = x$ が示されている．結論は "$y = \sin^{-1} x$" だが，このことの定義は "$x = \sin y$ かつ $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$" だった．したがって，$-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ を示せば結論が得られたことになる．ここで，定義から $0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$ なので上は成り立つ．

質問： 授業では $\frac{1}{(x-2)(x+3)(x-1)^2}$ の部分分数分解は $\frac{1}{(x-2)(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$ のかたちになることを前提に，A, B, C, D の値を求めていたのですが，なぜ $\frac{C}{x-1}$ の項が出てくることがわかったのですか．あと $\frac{1}{(x-2)(x+3)(x-1)^3}$ や $\frac{1}{(x-2)(x+3)(x-1)^4}$ を部分分数分解したときは，どのような項の和で表せるのでしょうか．

お答え： 定理の形で書けば，相異なる数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$，正の整数 $m_1, \dots, m_n$，および次数が $m_1 + \dots + m_n$ 未満の多項式 $P(x)$ に対して $\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{m_1} \dots (x-\alpha_n)^{m_n}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\beta_{k,1}}{x-\alpha_k} + \frac{\beta_{k,2}}{(x-\alpha_k)^2} + \dots + \frac{\beta_{k,m_k}}{(x-\alpha_k)^{m_k}} \right)$ となる $\beta_{k,l}$ が存在する．ご質問の例の最初は $\frac{1}{(x-2)(x+3)(x-1)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$,

質問： 例 7 で $\frac{1}{1-x^3}$ を部分分数分解したとき，分母が 2 次式だと部には 1 次式以下になるから $\frac{Bx+C}{1+x+x^2}$ とおくのだと説明されていましたが，例 1 の直後にあった $\frac{1}{(x-2)(x+3)(x-1)^2}$ は 4 項目を $\frac{D}{(1-x)^2}$ とおいています．分母が 2 次式なので分子は $Dx + E$ とおかないといけないと思うのですが，どうなのでしょうか?

お答え： 第 3 項と合わせてよんでください．$\frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} = \frac{Cx+(D-C)}{(x-1)^2}$ ですね．

質問： $\frac{1}{(x-2)(x+3)(x-1)^2}$ のような式を部分分数分解するときに，$\frac{1}{(x-2)(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{(x-1)^2}$ のかたちになることを前提に，A, B, C, D の値を求めていたの分母の次数より分子の次数を 1 つ下げるのはなぜですか． **お答え：**この場合，最後の項の分子は定数にしないと係数がひととおりに定まりませんよ．

質問： 部分分数分解をする際に，両辺に部分分数分解後の分数の一つの項の分母にある式を掛けることで，部分分数分解を簡単にする方法（拙い日本語ですみません）の名前をメモしわすれてしまったので，もう一度教えて頂きたいです． **お答え：**特に名前はありません．

質問： 初等関数の原始関数が初等関数であるとは限らないことはどういう場合におこりえるのですか．

お答え： 「初等関数の原始関数が初等関数であるとは限らない」は場合分けのない命題なので，質問の文が意味をなしません．「原始関数が初等関数にならないような初等関数にはどんなものがあるか」では? 第 9 回にコメントします．

質問： 高校では積分することができない関数があると習ったのですが，大学での学習範囲においても，積分できない関数は存在するのですか． **お答え：**「積分できない」は曖昧で，2 つくらい解釈があります：(1) 定積分が存在しない．これを「積分可能でない」という．(2) 原始関数が初等関数ではない．これらは第 9 回にコメントします．

質問： 初等関数の定義に「多項式. . .（略）に加減乗除，合成の操作を有限回. . .」とありますが，無限に操作すると何がだめなのでしょうか． **お答え：**それが初等関数の定義なので，定義の条件をみたさないのでだめ．

質問： 初等関数の定義（講義ノート p. 27）において，関数に加減乗除，合成の操作を有限回施すことで得られる関数を初等関数といいましたが，無限回施す関数も定義されているのでしょうか?

お答え： たとえば $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x$ の右辺は任意の x に対して収束するので関数を定める．とくに三角関数の無限和で表されているが初等関数ではない（知っている人のためのネタバレ：矩形波のフーリエ展開）．

質問： $f(x) =$ (略；例 2.1 (3) の関数) のような式が複数で成り立つ関数は，初等関数とはいえませんか? C^1-級でないからだめでしょうか?　**お答え：**初等関数ではない：理由は初等関数の定義をみたさないから (C^1-級とは無関係).

質問： 逆関数について，逆関数を考えることができるのは sin では $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のように，単調増加となっているときのみですか?　**お答え：**単調減少でも大丈夫．$\cos^{-1}$ はそのケース.

質問： 単に $y = \cos^{-1} x$ と書いたときは $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ なんですか．それとも $y = \cos^{-1} x$ $(-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2})$ とかくべきなのですか.　**お答え：**$\cos^{-1} x$ の値の範囲は $0 \leqq y \leqq \pi$．その上で $y = \cos^{-1} x$ の定義は？（定義 4.2）

質問： $\arcsin\theta$ は $(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta < \frac{\pi}{2})$ のように θ の範囲を毎回指定するべきものなのでしょうか?　**お答え：**θ の範囲はご質問の区間ではありません．講義ノートの定義や使用例をきちんと読んで下さい.

質問： おそらく昔からの決まり事だと思うのですが，どうして逆余弦，逆正弦，逆正接は “arc” で，逆三角関数は “inverse” なんでしょうか?　**お答え：**たしかに言われてみるとそうですね．角度に対する操作 sin を関数とみなす．弦の長さから角度 (弧の長さ；arc) を求める操作を関数とみなす，という気分の違いのように思います.

質問： 被積分関数とは何ですか?　**お答え：**積分される関数．$\int \log x\,dx$ なら $\log x$ が被積分関数.

質問： 整数の -1 乗と $\sin^{-1} x$ や $f^{-1}(x)$ など同じ -1 でも意味が違うのに違和感がありますが，変えるべきではないですか?　**お答え：**だれがどう変えるのでしょう．皆さんが今いるのは「高等学校の学習指導要領」の狭い箱庭でなく数百年の蓄積をもった科学・技術の広野です．うまい記号ではないかもしれませんが，そこで長い間使われてきたものを変えてしまうような権力は存在しません．ところでなぜ「**整数の** -1 乗」？

質問： $\sec x = (\cos x)^{-1}$ と表すことは可能ですか?　**お答え：**はい，こう書けば曖昧さはないとそう思います.

質問： $\cot x := \frac{\cos x}{\sin x}$ の $:=$ は $=$ となるべきなのではないのでしょうか.　**お答え：**講義ノート 21 ページ，脚注 10.

質問： 双曲線関数の加法定理はどのようにして導くのですか? 三角関数では図形を用いて導きましたが，双曲線関数でも同じようなやり方ですか? それとも頑張って式変形ですか.　**お答え：**指数法則を使う.

質問： 印刷物でなく手書きだと $\cosh t$ と $\cos(ht)$ の区別がつきにくくないですか?

質問： $\cosh t$ と $\cos ht$ を区別するために手書きのときも斜体のフォントを使った方が良いですか.

お答え： スペーシングで工夫しましょう．自分で書いたものが区別がつきにくいように見えたら，括弧を付けましょう.

質問： 双曲的余接，双曲的余割，双曲的正割も存在しますか.　**お答え：**普通に使います.

質問： 「hyperbolic cosine」なのになぜ「hcos」ではなく「cosh」なんですか．問題文で「$\cosh x$」と「$\cos hx$」のようなまぎらわしい表現をありますか.　**お答え：**後半は日本語が変ですね．前半は cosinus hyperbolique (Fr), coseno hiperbólico (Es), coseno iperbolico (It) などラテン系の言語の語順です．科学や工学で良く用いる SI (Le Systéme International d’Unités, Fr) もその語順ですね.

質問： hyperbolic とはどういう意味ですか.　**お答え：**語源：“hyperbole (f) exaggeration” と手元のラテン語辞書にあります．“過剰である状態” という意味でしょう．現代の意味：hyperbola は双曲線（辞書にある）．手元の辞書には “1st use: 15th century” とあります．楕円 ellipse, 放物線 parabola とともに円錐を平面で切った切り口に現れる曲線です．Apollonius の “円錐曲線論” (紀元前 2 世紀くらい) で研究されています.

質問： 個人的に $\sin^{-1} x$ や $\tan^{-1} x$ よりも $\arcsin x$ や $\arctan x$ の方が好みなので $\sinh^{-1} x$ を $\operatorname{arcsinh} x$ と書いても問題ないですか.　**お答え：**問題ないです.

質問： 今回教わった $\csc x$ や $\tan^{-1} x$ は単に式を見やすくするために使っているんですか? 覚えるのが大変そうなので GW 中にがんばります.　**お答え：**$\csc x$ はそうでしょうが，$\tan^{-1} x$ は他の書き方があるんでしたっけ.

質問： $\sec x$ や $\csc x$, $\operatorname{cost} x$（原文ママ）等の関数が生まれたいきさつをご存知でしたら教えていただけますか.

お答え： 知りません．ただそんなに最近じゃないです．本質的には cos を知っていればよいわけですが，さまざまな場面で便利なので記号を用意しているんですね.

質問： 余弦，正弦，正接の名前はどのように決まったのか.　**お答え：**日本語訳? 大昔の中国語訳からの転用らしい.

質問： cosine, secant などって何語ですか?　**お答え：**これ自体は英語．辞書にも載ってる.

質問： sine, cosine, tangent をまとめて三角関数と言っていましたが，secant, cosecant, cotangent をまとめて表現する語はありますか? またあるとしたら何ですか?　**お答え：**これらもまとめて三角関数といいます.

質問： 今日習った関数は “三角関数” に分類されますか.

お答え： cos, sin, tan, cot, sec, csc は三角関数，$\cos^{-1}\dots$ は逆三角関数，$\cosh\dots$ は双曲線関数.

質問： $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ など使用しても扱いやすくなるとは思えないのですが，どいった場面で扱いやすくなるのでしょうか.　**お答え：**扱いやすいかどうかは人によります．が，その記号を使っている人がいるので，あなたがたは（自分が扱いやすいと思っている，いないにかかわらず）これらの記号を読めなければなりません.

質問： 楕円関数というのもあるのですか.　**お答え：**ありますが，双曲線関数と同じノリの言葉ではありません.

質問： 偏微分について x と $\dot{x}$ が両方ある式 $f(x,\dot{x})$ を $\frac{\partial f(x)}{\partial \dot{x}}$ を計算するとき x の項は無視できるのは何故ですか.

お答え： この講義ではこういう記号を使っていませんので，文脈をお知らせください（想像はできますが).

質問： $t=\tan\frac{x}{2}$ としたときの $\cos x=$ (略) ということを説明するときに利用した座標になぜ x 軸と y 軸を記入しなかったのですか? 先生が記入しない方がいいなとつぶやいていた気がしていたのですが.

お答え： x を角度の意味で使ってしまったからです.

質問： $\tan^{-1}x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$ と $\sin^{-1}x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ という積分式を用いて表さずに $x=\tan y$ といったように x の形で表して計算するんじゃダメですか. **お答え：**どうやったって答えがあってればよい.

質問： $\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\tan^{-1}x$, $\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sin^{-1}x$ くらいは将来常識になりますか? **お答え：**現時点で常識.

質問： $(\cot x)'$, $(\sec x)'$, $(\csc x)'$ の結果は暗記する方がいいですか? **お答え：**すぐに答えが出せるならどうでも良い.

質問： 今回でてきた積分の公式は全て暗記するべきですか? 自信がありません. **お答え：**どれを公式と思っている？

質問： 先生のいう「火のないところに煙をたてる」計算は経験則でしかできないのでしょうか. **お答え：**多分.

質問： $y=\sin^{-1}x$ などの記述になかなか慣れません．何度も計算してみるしかないのでしょうか?

お答え： 高等学校のとき $\cos x$ などの記述に最初から慣れていたわけではないでしょう．どうやって慣れましたか?

質問： $\sin^{-1}x$ の -1 とはどのような意味をもつのですか? **お答え：**逆関数.

質問： p. 29〜30 の「余談」は解説は授業でやらないのですか? **お答え：**余談ですのでやりません．後期に.

質問： $\cosh x$, sinh, $\tanh x$ は e で表される式に対応している他は $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ の式の性質と同じと考えていいですか? **お答え：**意味がわかりません.「性質」として何を考え，どの程度「同じ」になることを想像している？

質問： 双曲線関数である cosh( ), sinh( ), tanh( ) はそれぞれ普通の $\sin x$ や $\cos x$, $\tan x$ との計算は出来ませんよね？双曲線関数用のものとして定義したと考えていいですか？ **お答え：**ご質問の意味が全くわかりません．双曲線関数を定義したわけですが，それが「双曲線関数用」というのはどういうことでしょうか.

質問： 全微分可能性について，$f(x,y)$ が領域 D の各点で偏微分可能かつ $f_x(x,y)$ または $f_y(x,y)$ が連続 $\Rightarrow$ f は領域 D において全微分可能．これの逆は成り立ちますか? **お答え：**まず定理の主張が誤り.「または」ではなく「かつ」．言葉上は僅差ですが，論理的には決定的な誤りです．そこを修正した上で，逆の成立については例 3.12.

質問： インターネットで講義ノートをみると 25 ページ目に「25」と記載されていなかったのですが，仕様でしょうか. まとめるときに使いづらくなってしまうので，ページ数は全てかいてほしいです. **お答え：**仕様です．節の表題ページに番号を振らないのは普通．1 回 8 ページなので，第 n 回の最初のページは $8n-7$ ページです.

質問： 試験時に持込可の A4 用紙はどれくらいの余白があるんでしょうか. **お答え：**過去の web ページを見よ.

質問： 実際に斜体を書きたいときはどのようい書けばわかりやすいですか. **お答え：**山田が黒板に書く程度です.

質問：「点とは部分のないものだ」とすると「配点」の存在が定義できなくなります... さすがに 1 か 0 かのテストはシビアなのでやめて下さい. **お答え：**問題ごとに 1 か 0 ということで.

質問： 今回習った記号以外にも今後でてきますか. **お答え：**「でてきますか」の主語が分かりません.

質問： オレはちょいと異端児な “変態” が世の中を動かすと思います．先生はどう思われますか? **お答え：**そうかもしれませんが，言葉が通じなかったらただのバカだよね.

質問： 後半になるにつれてわからなくなってきました．もう少しご声（原文ママ）を大きくされた方がいいと思います. **お答え：**これは「質問」ではなく「意見」の欄に書くべきものですね.

一週間遅れの質問と回答

提出期限に遅れた方のご質問です．なお，得点は加算されません.

質問： 微分可能かつ連続ならば C^{-1} 級（原文ママ：C^1-級のことか）が成り立たないのはなぜですか.「微分可能かつ連続」というのは C^{-1} 級の定義ではないのですか.

お答え： 講義ノート 23 ページの定義にそんなことは書いてありません（せめて書いてある通りによんでくれ).

質問： $f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ の右辺の意味がどうしてもよくわかりません.「h, k の増加分で左辺を割る」ことができないから右辺のような形になったということでしたが,「h, k の増加分で割る」という部分はどこにふくまれているのでしょうか. **お答え：**$\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ の部分です.

質問： 高校で習った「領域」には $=$ が含まれていたのですが，それは高校での領域の定義が間違っているということですか．それとも大学の「領域」とは意味が異なるのですか. **お答え：**確認：高等学校で習った「領域」は必ず $=$ が含まれていましたか? この授業では「端を含まない」ものを領域ということにします．数学も自然言語なので用語の定義は文脈によって異なります．この部分に関しては高等学校の教科書とは違った文脈を使っています.