2014 年 5 月 21 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 6

前回の補足

- 近似式について：2 変数関数の微分可能性の定義式

  $$(\star)\quad f(a+h,b+k)=f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}\qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$$

  の最後の項は (h,k) が十分 $(0,0)$ に近い時は他の項に比べて十分小さいとみなせる（それが ε の極限の条件）．ここで h, k は各々 x, y の変化量だから，それらを $h=\Delta x$, $k=\Delta y$ と書くと，$(\star)$ の等式は

  $$f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)=f_x(a,b)\Delta x+f_y(a,b)\Delta y+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

  と書き換えられるが，最後の項がとても小さいことに注意して，近似式 $\Delta f \fallingdotseq f_x\Delta x+f_y\Delta y$ ($(\Delta x,\Delta y)$ が十分 $(0,0)$ に近い時) を得る．ただし $\Delta f=f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)$ は f の値の変化を表している．たとえば問題 5-1: $f(x,y)=e^x(\cos y+\sin y)$ に対して $f(0,0)=1$ なので $(0,0)$ の近くで

  $$(*)\qquad \Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)\fallingdotseq f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y=\Delta x+\Delta y.$$

  これを用いれば $f(0.1,0.2)\fallingdotseq 1+0.1+0.2=1.3$ がわかる．
  近似式の正確な意味，精度などについては，後期にテイラーの定理を扱う際に詳しく学ぶ．
  なお，近似式 $(*)$ は全微分の等式

  $$df=(f_x,f_y)=f_x(1,0)+f_y(0,1)=f_x\,dx+f_y\,dy$$

  と似ているので "全微分は近似式の覚え方" と見ることもできる．

前回までの訂正

- 講義にて変態を一人紹介すると述べましたが，し忘れました．講義ノートの問題 5-7 です．
- 講義ノート 40 ページ，問題 5-2：2 変数関数が f が $\Rightarrow$ 2 変数関数 f が
- 第 6 回分の講義ノートのページ番号がずれていました．**第 6 回講義ノートは 41 ページから**はじまります．
- 講義ノート 34 ページ，脚注 3 の式の左辺：$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})$ $\Rightarrow$ $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})$

授業に関する御意見

- 昨日の授業は聞きとりやすかったです．　**山田のコメント：** やはり「計算」という体力仕事をやっていると声をはっきりすることを忘れるようです．気をつけます．
- $-$（マイナス）と $=$（イコール）の区別がつきにくいので少し離して書いていただけるとうれしいです．　**山田のコメント：** 了解．
- 今日は 30 度を超えて熱かったですね．　**山田のコメント：** いいえ，暑かったですが．
- 魔の使い方の例えは分かりやすかったです．　**山田のコメント：** でしょ．
- 高大連携の授業ということですがこれを勉強している高校生ってイケメンですね．　**山田のコメント：** 変態，じゃなくてね．
- 先生は変態が好きですか．　**山田のコメント：** 変態による
- 左側車線を前進する方を正として，制限速度 50km（50km/h 以下で走行せよ）であるとき，-50km/h で走ってもよいかもしれませんが危険です．
  山田のコメント： そうそう．だから「速度注意」は符号をふくめて「速度注意」なんですね．
- 人を動かせる人間（言葉を相手に伝えることができる）ようにならないと感じました．記号をしっかり覚えようと思いました．　**山田のコメント：** 感じてください．
- 言葉の通じる少なくとも一般人になれるよう努力します．．．．何度も意味不明な質問ばかりしていてすみません．それから冷房をゆるめてほしいです．
  山田のコメント： 意味不明な質問はネタにさせていただくので，むしろありがたいです．冷房については場所によるようです．工夫してみてください．
- 室温が丁度よいと思う．　**山田のコメント：** 了解．
- アポロニウスの円というものを聞いたことがありません．知っているのが当然というように進めてほしくないです．
  山田のコメント： 高等学校数学 II の教科書にのっています．知っているのが当然です．
- 「旅」と言ってわかりやすく説明して下さったのでちんぷんかんぷんではなかったのですが，分かったような分からないような，．．．って感じです．
  山田のコメント： たとえ話によって理解できるのはそんなもの．あとは，たとえからどれくらい離れられるか．
- 先生は艦これやっていらっしゃいますか？　**山田のコメント：** やっていらっしゃいません．
- 授業前の 1 時限，2 時限は他の生徒がこの教室を使っていないので，自習に利用できて便利です．
  山田のコメント： 生徒は利用しないはず．ここは大学だから．大学生は生徒ではなく学生（学校教育法参照）．

質問と回答

質問： 命題 5.6 の証明で $F(t+\delta)-F(t)=f\bigl(x(t+\delta),y(t+\delta)\bigr)\dots$ （36 ページ一番下）と記されているところがあるのですが，これは前々回の授業の $f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ と同じ役割をしているのですか（日本語が拙くてすみません）.

お答え： 役割というわけではなく，微分可能性の定義式の h, k に $h(\delta)$, $k(\delta)$ を代入しただけです.

質問： 講義プリントの命題 5.6 の証明において，37 ページの（略）の右辺 3 項めに $|\delta|/\delta$ がかけられているのは δ がマイナスのときもあるのでそれを考慮しているためですか? **お答え：**そうです.

質問： 2 変数関数で微分可能であるための必要十分条件はプリントにありましたが，3 変数以上の関数で微分可能であるための必要十分条件は存在するのですか．また存在するとしたらどのような条件ですか.

お答え： 「類推」せよ：3 変数関数 $f(x,y,z)$ が (a,b,c) で微分可能であるための必要十分条件は

$$\varepsilon(h_1,h_2,h_3):=\frac{f(a+h_1,b+h_2,c+h_3)-f(a,b,c)-f_x(a,b,c)h_1-f_y(a,b,c)h_2-f_z(a,b,c)h_3}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}$$

とおくときに $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)}\varepsilon(h_1,h_2,h_3)=0$ が成り立つことである.

質問： $(df)_P=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P),\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right)$, $(\operatorname{grad} f)_P=$ (略) なので $(df)_P={}^t(\operatorname{grad} f)_P$ ということで合っていますか?

お答え： はい.

質問： $(df)_P=(1,-3)$ のとき $(\operatorname{grad} f)_P={}^t(df)_P=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ と表すことも可能ですか．それとも勾配ベクトルという新たな概念となり，全微分とは異なるために上記のように書き表すことは数学的に正しくないのでしょうか.

お答え： 正しいです．とりあえず難しいことは言わなくてよいです.

質問： 勾配ベクトルをわざわざ行ベクトルで書いてしまうと行列による処理ができなくなってしまうと思うのですが，なぜ行ベクトルにしてしまうのですか?

お答え： 内積の性質を用いたいので，方向ベクトルと同じ型にした．必要に応じて df も $\operatorname{grad} f$ も使います.

質問： $f(x,y)=2(x^2-y^2)-(x^2+y^2)^2$ の例のとき $|\boldsymbol{v}|=\left|\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right|=1$ とおいているので，$v_1=\cos\theta$, $v_2=\sin\theta$ などとおけば，点 P に立ったときに向いた方向の斜面の傾きがわかるのではと思いましたが，間違っていませんか?

お答え： 間違っていません.

質問： コーシーシュワルツの不等式より $-\sqrt{10}\leqq\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{v}\leqq\sqrt{10}$ までは分かるのですが，そこから $\boldsymbol{v}$ が最大 $\to$ $\boldsymbol{v}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$，最小（略）となるのがうまくつかめません.

お答え： コーシーシュワルツの不等式の**等号条件**は何だったでしょう（ということでつかめますか?）

質問： $\operatorname{grad} f_P$ が零ベクトルでないとき，このベクトルは P における f の等高線に垂直な方向を与えるというのは $\operatorname{grad} f_P$ の定義によるからですか.

お答え： $\operatorname{grad} f_P$ の定義は講義ノートの 39 ページですが，その定義からすぐにわかりますか? 問題 5-6 ですね.

質問： 板書でいままで $(1,-3)$ と書いていたところを最後 $\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ と書いたのはなぜですか.

お答え： 前者は全微分 df，後者は勾配ベクトル $\operatorname{grad} f$.

質問： $df=(4x(1-x^2-y^2),-4y(1+x^2+y^2))=4x(1-x^2-y^2)\,dx-4y(1+x^2+y^2)\,dy$ $\varphi(x,y)=x+0y$, $\varphi_x=1$, $\varphi_y=0$, $\psi(x,y)=y$, $\psi_x=0$, $\psi_y=1$；φ, ψ って何を表しているのでしょうか?

お答え： とくになにも．$dx=(1,0)$, $dy=(0,1)$ ということをいうために一時的に用いた記号.

質問： 補足部分で $\varphi(x,y)=x$, $\psi(x,y)=y$ から $d\varphi=(1,0)=dx$, $d\psi=(0,1)=dy$ として $df=$ (略) とかける，という説明がありました．この先，$dx=(1,0)$, $dy=(0,1)$ は明らかなこととして扱い，使っていった場合，読み取ってもらえるものですか? **お答え：**全微分を考える文脈ではそうです.

質問： $\frac{dF(0)}{dt}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P),\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right)\begin{pmatrix}\dot{x}(0)\\\dot{y}(0)\end{pmatrix}$ の間に内積の $\cdot$ は要らないのですか?

お答え： 内積ではなく行列の積のつもりですので，不要です.

質問： $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}f\bigl(\gamma(t)\bigr)=(1,-3)\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ の所で何をしているのか分かりません.

お答え： 左辺と右辺が同じになる，ということしか言っていません.

質問： 合成関数の微分公式について $\frac{dF}{dt}(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(P)\frac{dx}{dt}(0)+\frac{\partial f}{\partial y}(P)\frac{dy}{dt}(0)$ なぜ d と ∂ が入り混じってるんですか? 分数みたいに扱えないよ，と言いたいからですか? それとも区別して書かないとダメなんですか?

お答え： $x(t)$, $y(t)$ は 1 変数関数なので，その微分は $\frac{dx}{dt}$ など．$f(x,y)$ は 2 変数関数なので ∂ を用いる．$F(t)=f\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ は 1 変数関数なので d を使う.

質問： $\gamma(t)$ の $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分とは $(1,-3)\binom{v_1}{v_2}$ のことであっているのですか? **お答え：**$\gamma(t)$ の方向微分ではない．

質問： 補足の φ_x, φ_y, ψ_x, ψ_y の話はいわばベクトルに例えると単位ベクトルのようなものなのでしょうか.

お答え： おっしゃっている意図を推測すると，そうですが，「基本ベクトル」や「標準基底」というべきです．単位ベクトルとは大きさが 1 のベクトルの意味です.

質問： 基本的なことを質問するようですみません．高校で習った 1 変数関数の微分は全微分をしているのですか? 偏微分をしているのですか? あるいは全微分，偏微分とは多変数関数のみに通用する概念なのでしょうか.

お答え： 1 変数関数では「全微分」も「偏微分」も同じものなので，区別する必要がないわけです.

質問： 今日の授業を受けるまでは x^4 は C^4-級だと思ってました．ある関数を何回微分しても微分不可能な形にならない場合，その関数は C^∞-級ということですか? **お答え：**定義（講義ノート 14 ページ）を見よ.

質問： アポロニウスの円について口頭だけの説明だったのでよくわかりませんでした．アポロニウスの円についてもう少し詳しく説明してください. **お答え：**高等学校数学 II，図形と方程式，軌跡のところでやったはず.

質問： 物理では，微積が基本だが，どのように方向微分，全微分を使っているのか．そして，方向微分したものを積分できるのか.

お答え： 「方向微分」は微分係数に対応するものですから，積分には馴染みませんね (1 変数でも)．全微分や方向微分は教科書のいろいろなところに出てきていますよ.

質問： 数学において近似を使うことは許されますか? **お答え：**近似を近似として使うのは普通．講義ノート 4 の余談を見よ.

質問： 行列で書いた公式が全然かっこよくみえないんですが，そのうち，この書き方いいなって思えるようになりますか? **お答え：**人によります．なんともいえません.

質問： Δx と dx の違いはなんですか.

お答え： Δx はこの資料の補足参照．十分小さい数を表しています．一方 dx は（普通は「無限小」といわれています）数ではありません．この授業では $dx=(1,0)$ ですね.

質問： $\varphi(x,y)=x$ となるなら x は任意の変数の関数ですか．たとえば $f(x,y,z)=x+0y+0z$ のようになります.

お答え： たとえば $f(x_1,\dots,x_n)=x_1$ は n 変数関数と思えます.

質問： キョリを微分するとなぜ速度になるんですか?

お答え： 距離の微分ではなく，位置ベクトルの微分です．平面上の運動 $\gamma(t)$ に対して $\gamma(t+\delta t)-\gamma(t)$ はどういうベクトルになりますか?

質問： 全微分を示す "微分" と導関数を導く "微分" について "微分" という言葉には 2 つの意味があって，その 2 つの意味は全く異なるという解釈でよいですか?

お答え： そうですね．「全く」というと言い過ぎかもしれませんが．"全微分" の微分は differential (名詞) 微分は derivation.

質問： 高校の授業で $y^2=x^3 \to 2y\,dy=3x^2\,dx$ のようにして，これを「全微分」と呼んでいたのですが，授業中にやったものと同じと思えません．高校の授業が間違っていたということでしょうか?

お答え： $F(x,y)=y^2$ の全微分は $2y\,dy$ です．まったく同じものを扱っています.

質問： 全微分は方向微分を簡潔に表すためだけに作られたものなのですか.

お答え： たいていのものは「だけ」ではないはず．数学的概念は多義的なことが多いので，こういう断定的な文にはすごく違和感を感じます．授業では「近似式」の説明を少しだけしましたね（だから「だけ」ではない)．講義ノート 4 の余談を見よ.

質問： 命題と定理の違いって何ですか.

お答え： 講義ノートの内容でいえば，論理的には同じ「数学的事実」を表しています．とくに，その中で「重要」と思われるものに「定理」と名前をつけるのが習慣のようです.

質問： grad とは何ですか?

お答え： 講義ノート 39 ページ

質問： 補足のところででてきた $\psi \leftarrow$ この文字の読み方と書き方がわかりません.

お答え： psi. 高等学校数学の教科書にギリシア文字の読み方の表があるはず.

質問： 講義ノート P36 の命題 5.6 の証明に出てくる「:=」という記号はどういう意味ですか?

質問： := という記号はどういう意味ですか?

お答え： 講義ノート 21 ページ，脚注 10．講義資料 3 ページ 18 行目に既出.

質問： $\widehat{P}$ の ^ はどういう意味ですか? $\tilde{\sigma}(x)$ の ~ はどう言う意味ですか?

お答え： 中学校や高等学校で，よく A に対応するが A とは違う対象に "プライム" をつけて A' と表しませんでしたか? それと同じノリで，関係あるものに似た記号を使うための装飾文字として ^ や ~ を用います.

質問： $\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2)$, $\boldsymbol{o} = {}^t(0, 0)$ は列ベクトルと読むのですか．行ベクトルの転置と読むのですか．それとも何か特別な読みがあるのですか.

お答え： 行ベクトルの転置と列ベクトルは同じだと思いますが．読み方というなら「(v_1, v_2) の転置」「v_1, v_2 を並べた列ベクトル」ほかにもいろいろあるのでは?

質問： 授業をプリントの順番と異なる順序で行うのはなぜですか? できれば統一して欲しいです.

お答え： 同じようにやるなら授業は不要．プリントでは「論理的な順序」をある程度重要視しているが，講義によってその全体を眺め「おおざっぱな」理解をしてもらうつもり．もちろん，事前に講義ノートを読んできていることが前提.

質問： 問題 6-3 において，どれをどう微分して変換して行列の形にするのかがよくわかりません．r と r_x, r_y, r_z の対応の仕方が主に分かってないです．(φ_x, φ_y, φ_z, θ_x, θ_y, θ_z も同様に分かりません.)

お答え： 2 変数の場合（例 6.10）の類推で分かるはず.

質問： 今更ですが，$D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された 2 変数関数 $f(x, y)$ が D 上で x 方向にも y 方向にも偏微分可能ならば f は D で連続ですか? また逆は成り立ちますか?

お答え： 今更ですね．例 3.5，問題 3-2.

質問： 全微分と方向微分はどういったときに使用するのか.

質問： 全微分と方向微分はどのような時に使うのですか?

お答え： 関数の変換を調べるとき.

質問： $\operatorname{grad} f$ が使い方がよく分からないです.

質問： 勾配ベクトル grad はどのように利用されますか?

お答え： 問題 5-6.

質問： 今回の授業から類推すれば，電場のポテンシャルエネルギーにおいて grad 方向というのは電場ベクトルの向きということになるのでしょうか.

お答え： 大体正しいですが，向きを逆にするのが自然です．ポテンシャルを V とすると $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} V$.

質問： f の勾配ベクトル グラードは グラジェンド（原文ママ：グラジェントのこと？）と読んだときとは意味が異なりますか?

お答え： すみません，グラードは非公式な読み方，gradient です.

質問： $f\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ の 2 変数関数を $F(t)$ の 1 変数関数であらわすメリットは何ですか?

お答え： ある曲線に沿った変化の様子がわかる.

質問： $dF =$ (式省略) ヤコビ行列について，ベクトルでなく行列で表すことに何かメリットがあるのですか.

お答え： 行列の積が使える：命題 6.5.

質問： $y = \sin^{-1}\frac{x}{a} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \sin y$ というのが分かりませんでした．$y = \sin^{-1} x$ は $y = \sin x$ を $y = x$ について対称移動したものだから $x = \sin y$ となるので $y = sin^{-1}\frac{x}{a}$ が $x = \sin^{-1}\frac{y}{a}$ だと思いましたが，$\frac{x}{a} = \sin^{-1} y$ なることが分かりませんでした.

お答え： 関数とグラフは別物．$y = \sin^{-1} x$ は "$y = x$ に関して対称移動" できません．「グラフ $y = \sin^{-1} x$ を直線 $y = x$ に関して対称移動するとグラフ $y = \sin x$ となる」といっているだけです．逆三角関数の定義は「対称移動」とかそういうものから来ているわけではなく，講義ノート 26 ページにあることが定義です．グラフを考えると x や y の文字が固定されてしまうのでわかりにくくなりますが，定義 4.2 の文字の使い方は何でも良いのです：$A = \sin^{-1} B \Leftrightarrow B = \sin A$, $-\frac{\pi}{2} \leqq A \leqq \frac{\pi}{2}$.

質問： この授業は配信されてどんな人が見ているのですか?

お答え： 一応，高等学校・高等専門学校の生徒・学生.

質問： 先生が「○○魔」で表されるとしたら何魔ですか?

お答え： そんなに濃い性格ではないので，あまり「魔」ではないと思いますが，試験の後などは「悪魔」かもしれません.

質問： 先生は「変態」だから艦これやってますよね?

お答え： 「艦これをやっているならば変態」とその逆「変態ならば艦これをやっている」は独立な命題です．前者と同値な命題は「変態でないならば艦これをやっていない」（対偶）ですね.

質問： 先生は提督なんですか? **お答え：**いいえ.