2014 年 5 月 28 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 7

前回の補足

- 独立変数・従属変数という語の意味についての質問がありました．2 つの量 x, y に関数 f で結ばれる関係 $y=f(x)$ があるとき x を独立変数，y を従属変数といいます．同様に $z=f(x,y)$ という関係があるとき x, y を独立変数，z を従属変数といいます．
- 大文字のデルタとラプラシアンの区別はどうつけるか，という質問が複数．本によっては Δ, $\mathit{\Delta}$, $\triangle$ などを使い分けることもありますが，普通は使い分けません．文脈依存です．区別がつきにくいときには言葉で補足説明をします．例：$u_{tt}=\mathit{\Delta}u$，ただし u は (x,y) に関するラプラシアンを表す．

前回までの訂正

- テキスト「微分積分学講義」171 ページ 1 行目：$\sqrt{h^2-k^2} \Rightarrow \sqrt{h^2+k^2}$
- 第 3 回提示資料，9 ページ，下から 2 行目：$\frac{1}{r}\bigl(r^2F''(r)\bigr)' \Rightarrow \frac{1}{r^2}\bigl(r^2F''(r)\bigr)'$
- 波動方程式の解法で，板書に誤りがあったそうです．
$u_{tt}=(-cu_\xi+cu_\eta)_\xi\xi_t+(-cu_\xi+cu_\eta)_\xi\eta_t \Rightarrow u_{tt}=(-cu_\xi+cu_\eta)_\xi\xi_t+(-cu_\xi+cu_\eta)_\eta\eta_t$
- 平面のラプラシアンを極座標で表示する計算の中で板書に誤りがあったそうです．
$u_{xx}=\cos\theta\left(\cdots-\frac{1}{r^2}\sin\theta u_{r\theta}\right)\ldots \Rightarrow u_{xx}=\cos\theta\left(\cdots-\frac{1}{r}\sin\theta u_{r\theta}\right)\ldots$
- 座標平面の $x<0$, $y>0$ となる部分を第 3 象限と言ったそうです．第 2 象限です．

授業に関する御意見

- だんだん授業中に理解ができなくなりってきました（復習がんばります（多分））． **山田のコメント：** Sorry，今回はちょっとやりすぎたかも．
- 微積難しすぎます． **山田のコメント：** そう?
- 東工大の学生でない人も東工大の本講義が受けられるのはすばらしいシステムかも知れません．（東工大の学生である自分もそうした人たちに負けないようにしなければ. . . ）
山田のコメント： 勝ち負けではないのでは?
- しっかり復習して理解できるようにしたいです． **山田のコメント：** ぜひ．
- 授業の PowerPoint の資料も事前配布してほしい． **山田のコメント：** PowerPoint ではありません．提示資料は当日朝に電車の中で作ったりしているので，難しいです．
- 最近プリントが難しいです．予習で読んでもわかりません．そろそろ本気で頑張ります．
山田のコメント： 分からないところは「ここがわからない」とチェックしておくだけでもよいと思います．講義はノートよりずっとゆるくやっていますが，だいたいその程度の理解でよいとは思います．講義ノートにするとあるていど「きちんと」書かなければいけないので難しくなるかもしれません．
- 計算量がすごかったです． **山田のコメント：** そんなことはありません．
- 睡摩の “摩” はどういった用法でしょうか. . . **山田のコメント：** 睡魔ではないでしょうか．
- パソコン画面のマウスポインターってどうやって動かしてるんでしょうか．マウスを使っていらっしゃらないように見えるのですが. . .
山田のコメント： ワイヤレス・トラックボール（通称「ごろねマウス」）を使っています．スクリーンが 2 つあるので，レーザーポインタが使えないので．
- やっと解答をみつけることができました!! **山田のコメント：** 間違いをみつけたら教えてください．基本的にノーチェックなので．

質問と回答

質問： 全微分可能と微分可能の定義が同じなのですが．全微分可能と微分可能は同じことなのですか?

お答え： 同じことです，ということを授業の最初にコメントしました．

質問： 僕はいまだに合理的にはなれていないため，系 6.2 を合成関数の微分からあたりまえだろうと何の疑問ももたずに授業を受けてしまったのですが，講議資料 p 43（山田注：改訂されたノートの 41 ページ）の「偏微分の意味を考えれば」の部分がわかりません．

お答え： 命題 6.1 から系 6.2 を導くには何をすればよいかを考えればよいと思います．ところで講**議**資料って何ですか?

質問： 注目する変数によって合成関数の微分が 2 種類ありますが，それぞれどうやって使い分ければよいのですか?

お答え： ご質問の意味がわかりません．何と何の 2 種類ですか?

質問： 波動方程式についての板書で $u_{tt} = c^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})$ を示すときに，$u_{\xi\eta} = u_{\eta\xi}$ を使っていたと考えられるのですが，u は C^2-級であると限定しなくてよいのですか．

お答え： もちろん C^2-級でなければなりません．講義ノートの問題 6-2 には明示的にかかれています．

質問： 波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ の c は何に相当しますか? **お答え：**波の伝わる速さ．

質問： 波動方程式の説明のところで，$\xi = x = ct$（原文ママ，$x + ct$ のことか），$\eta = x - ct$ とおいたのは，このように置くことで微分計算をしやすくするためですよね．どうしてこのように置こうと思いついたのですか? 経験的にこうするのですか? **お答え：**「微分をしやすく」でなく，微分方程式を解くため．経験的だと思ってください．「因数分解」$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)$ による，とも言えるが，深入りしない．

質問： $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(c > 0)$ をとくとき，$\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ はどのように決めたのですか．

お答え： うまくいくように決めた．この置換を思いついたのが偉いので，d'Alembert の解法という名前がついている．

質問： (t, x) と (ξ, η) の役割を勝手に入れ替えてよいのでしょうか? $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ なのでそれは許されないのでは? **お答え：**ご質問の意味がわかりません（とくになぜ「なので」なのか読み取れません）．質問の式から (t, x) を決めると (ξ, η) が決まる，また (ξ, η) を決めると (t, x) が決まる．だから (t, x) を決めることと (ξ, η) を決めることは同値．なので $u(t, x)$ の 2 つの変数 t, x を ξ, η に置き換えて考えて良い．

質問： (t, x) と (ε, v) (原文ママだと思う．ξ, η の字が下手だっただけ，ということも否定できない) の役割というのは同じようなものですか? **お答え：**ご質問の意味がわかりません．

質問： $u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$ の証明は極座標，直交座標のどちらの場合においてもできるようにしとかなくてはならないと思いましたが，先生のおっしゃっていた $u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x$ としたときに $\frac{\partial r}{\partial x}$ と $\frac{\partial x}{\partial r}$ をかけても 1 にならないということ以外に極座標，直交座標の条件下の証明において注意すべき点はありますか?（日本語が拙くてすみません） **お答え：**確かに何を聞かれているか全然わかりません．結論の式は極座標も直交座標も含むので，「極座標の場合」が何なのかわからないのです．

質問： $\theta =$ (略，講義ノート，命題 6.8 の前の $h = \dots$ の式) の中段と下段で $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ ではなくて $\tan^{-1}\frac{x}{y}$ となっているのはなぜですか? **お答え：**x を分母にもってきたくないから．

質問： 偏微分は積分で元に戻すことはできないみたいですが，2 変数函数等の変数が 2 つ以上の函数の全微分は積分で元に戻せますか．

お答え： 全微分で得られたものとわかっているなら**線積分**で元にもどせます（この授業では扱いません）が，たとえば「$(x^2, xy) = x^2\,dx + xy\,dy$ を全微分にもつ C^∞-級関数 f を求めよ」という問題の解は存在しません．

質問： 例えば二変数関数 $f(x, y)$ のある (x, y) で全微分可能（原文ママ，「の」でいいの?）であれば，これは (x, y) からの微小変化 Δf が $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ で近似ができると考えていいですか．

お答え： 違います．右辺は Δf の定義であって，近似でも何でもありません．これが $f_x\Delta x + f_y\Delta y$ と近似される．

質問： 命題 6.5 の $d(G \circ F)(\boldsymbol{x}) = dG\big(F(\boldsymbol{x})\big)dF(\boldsymbol{x})$ の「右辺の積が行列の積を表す」とありますが，行列の積だといわれるまで気づきませんでした．どこを見て行列の積だと判断すべきなのでしょうか?

お答え： ではどんな積だと思ったのでしょう．定義から dG も dF も行列．それが並んでいたら「行列の積」と思うのが自然．ひとつ記号が数を表すのか，ベクトル，行列を表すのか，関数を表すのかを文脈で判断しましょう．

質問： 授業で id_D について触れられていませんでしたが，今後も授業では扱わないんでしょうか?

お答え： 扱う際には一言，定義を述べます．いずれにせよ，必要なのは講義ノートにある定義だけです．

質問： 逆写像とは恒等写像の中の特別なものを指すのでしょうか．それとも，また違った何か別のものを指すのでしょうか．そもそも恒等写像，逆写像が何なのか，講義ノートを見てもよく分かりません．

お答え： 講義ノート，逆写像の項に恒等写像の定義がある．$\mathbb{R}^2$ 上の恒等写像とは (x, y) に対して同じ (x, y) を対応させるもの．関数と同様，たくさんの写像がありますが，恒等写像はそのうち（定義域を決めれば）ただ 1 つ．その「特別なもの」はナンセンス．写像 F の逆写像とは F と合成して恒等写像になる写像のこと．定義は講義ノート例 6.6 の直前．この定義と比較しながら，例 6.6 を一行ずつきちんと読んでごらんなさい．

質問： p47 の命題 6.8 において，$d(F^{-1})\big(F(\boldsymbol{x})\big)$ は $\big(F(\boldsymbol{x})\big)d(F^{-1})$ のことですか? $d(F^{-1})\big(F(\boldsymbol{x})\big) = dE$ ということでしょうか? $d(F^{-1})\big(F(\boldsymbol{x})\big) = \big(dF^{-1}(\boldsymbol{x})\big)^{-1}$ の式が理解できません．

お答え： 書いてあるとおりに読めば良い（どうも書いてないことを読もうとしている）．命題 6.8，3 行目の第 2 式（「すなわち」以下の式）の左辺は，「写像 F^{-1} の微分写像 $d(F^{-1})$（これは各成分が関数であるような行列）の $F(\boldsymbol{x})$ における値」，右辺は「写像 F の微分写像 dF の $\boldsymbol{x}$ における値（これは行列）の逆行列」．具体的には例 6.9 で $\boldsymbol{x} = (r, \theta)$, $F(\boldsymbol{x}) = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ とみなすと，左辺は (6.4) 式，右辺は (6.5) 式の逆行列となる．

質問： (6.5) 式 $dG =$ (略) とチェインルールを用いるときの偏微分の順序交換に注意するとは何ですか.

お答え： $f_{r\theta} = f_{\theta r}$ を用いて，ということです.

質問： (1) $\frac{\partial r}{\partial \theta} = \rho_x x_\theta + \rho_y y_\theta = 0$, $\frac{\partial r}{\partial r} = \rho_x x_r + \rho_y y_r = 0$ なのはどうしてですか．分かりません．(2) あと $\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix}$ の近くに書いてあった $\frac{\partial r}{\partial x}$ の意味も分かりません.

お答え： (1) r, θ の関数として $r(= r + 0\theta)$ を r と θ で偏微分した（左辺）ので 1, 0 となる．(2) r_x のことですが，これを分数の形で書いても $\frac{\partial x}{\partial r}$ の逆数にはならない，ということを説明した.

質問： 授業内で $\begin{pmatrix} \rho_x & \rho_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix}$ としたのは $(r,\theta) \overset{F}{\mapsto} (x,y) \overset{G}{\mapsto} (\rho,\varphi)$ において実質的に $\rho = r$, $\varphi = \theta$ だからでしょうか?　**お答え：**はい.

質問： 講義ノート p 46 の $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を求める式変形のところで，$\frac{\partial f_r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f_{rr} - \frac{y}{x^2+y^2} f_{r\theta}$ となるのがよく分かりません．$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = r_x$，$\frac{-y}{x^2+y^2} = \theta_x$ だから，$\frac{\partial f_r}{\partial x} = r_x f_{rr} - \theta_x f_{r\theta}$ となるので，これは $x = r\cos\theta$ と定めているからチェインルールを用いて r や θ で微分してから，さらに x で微分しているということでしょうか.

お答え： 後半の部分がよく分かりませんが，$g = f_r$ という関数を (x,y) の関数とみなして x で微分するのが $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f_r}{\partial x}$. これを (r,θ) の関数と思い直して，r や θ の微分で書きなおす，すなわち $\frac{\partial g}{\partial x} = r_x \frac{\partial g}{\partial r} + \theta_x \frac{\partial g}{\partial \theta}$ としています.

質問： $f(x,y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$，$\frac{y}{x} = u$ とする．偏微分は，微分とは異なり分数の訳文みたいなものができないという話でしたが，f_x とは，結局のところ $\tan^{-1} u$ を u で微分したものに $\frac{\partial u}{\partial x}$ をかけたもの，$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$ となっていますが，これは $g(u(x,y), v(x,y)) = \tan^{-1} u$, $u(x,y) = \frac{y}{x}$, $v(x,y) = 0$ としてあげて，合成関数の偏微分公式で $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$ となっているのでしょうか?

お答え： むりやりそう書いてもよさそうですね．たぶん $G(t) = \tan^{-1} t$（1 変数関数）として $f(x,y) = G(u) = G(y/x)$ とするのが自然だと思います．すると，$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dG}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}$.

質問： (1) 第 6 回の授業プリントの問題 6-3 で，θ の定義域が $-\pi < \theta < \pi$ となっていますが，$-\pi < \theta \leqq \pi$ が最も適当な表記だと思います．(2) 問題 6-3 をやってみようと思ったのですが，(r,θ,φ) と (x,y,z) との関係は $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\theta = \{\tan^{-1} \frac{y}{x}\ (x > 0), \dots$ 略，$\varphi = \tan^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ であっていますか?

お答え： (1) それでも良いのですが，(r,θ,φ) 空間の「領域」を定義域にしたい（ずっとそういう文脈でやってきた）ので "$\leqq \pi$" と端を含めてしまうとまずいのです．今回は「日付変更線」はみない，ということで $\theta < \pi$ としました．(2) 問題 6-3 の通りの問題ならそれでよい．もし $-\pi < \theta \leqq \pi$ として，θ の表示式を講義ノート 45 ページの形のもの，としているのであれば $\theta = \pi$ となる点が表示されていないので間違い.

質問： ラプラシアンと調和関数とはどのような関係ですか.　**お答え：**ラプラシアンを施して 0 となる関数が調和関数.

質問： 授業の始めの頃に，定義，定理について説明していたと思うんですが，定理と公理にはどんな違いがありますか?

お答え： 数学では用語に定義が必要ですが，定義をさかのぼっていくと「どこかで止めなければ無限に続く」ことに気が付きます．「どこかの止め際」を決めるわけです．たとえば「自然数全体の集合」を「これ」と特定する代わりに「. . . という**性質**をみたす集合」という約束をして，この性質から導かれる性質を自然数の性質とよぶことにするのが普通です．とくに自然数の集合を特定しているわけではなく，ある「性質」をもつものという間接的な定義をするわけです．この「性質」を**公理**といいます．公理は議論の出発点となる命題ですので，それを「証明」することはありません．後期に「実数の連続性公理」を扱う際にもう少し詳しくお話しします.

質問： 何故わざわざ行列を用いて chain rule を表す必要があるのですか?

お答え： ラプラシアンの極座標表示を求めるときに，逆行列をとったと思います．それが便利なので（というのは行列を用いる意味を矮小化しているが，まあ，一つはそれ).

質問： 偏微分が九九ならば，ラプラシアンは何にあたりますか?　**お答え：**まだ九九を脱していないと思います.

質問： なぜ ξ や η を使うのですか．x や y と区別したいなら α や β, γ で書けば良いと思ったのですが d と ∂ のように使い分けしているのですか?

お答え： 使い分けではなく古来の習慣．x を使うのもデカルト以来の習慣．たくさんの人が使うからそれに慣れたほうがよい.

質問： 授業で "$\tilde{f}$" という記号がでてきたときに 'えふなみ' と読んでいましたが，それが正式な名前ですか.

お答え： "tilde f", "f tilde", "f tilder" などと読むようです.

質問： $\widetilde{F}$ の $\tilde{}$ は $F^{㊇}$ とかいてめんどくさいと言っていたと思うのですが，他の文字を用いるのを省略するために導入したのですか．$f\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr) = g(\xi,\eta)$.　**お答え：**そう．面倒臭いので，右辺を $f(\xi,\eta)$ と書いてしまえと.

質問：「η」と「7」を混同しないように留意している点はありますか． **お答え：**7 は角をつける，η の尻尾は曲げる．

質問： ξ, η などの新しい記号はまだこれから出てきますか? **お答え：**ギリシア文字は古い記号です．

質問： 直交座標を英語で the Cartesian coordinate system というそうですが，Cartesian が “デカルトの” に当たる部分なら「デ」に当たる音が消えていますが，どういうことでしょうか?

お答え： 講義ノート脚注 9．講義でも言及したがルネ・デカルトのラテン語名は Renatus Cartesius.

質問： 行列を交えると何が起きているかわからなくなるので，行列抜きで考えてもいいですか?

お答え： 考えてもいいですが，行列で書かれたものは読めて下さい．

質問： チェイン・ルールを行列の積で表した式の利用できる場合にはどういうものがあるのでしょうか?

お答え： 微分可能性の仮定の下，いつでも成り立つ式だから，どんな場合でも使える（使えない場合が考えられない）．

質問： ヤコビ行列は何に使うのですか? **お答え：**今回，ラプラシアンを極座標表示する計算で，ヤコビ行列の逆行列を使いました．第 12 回，重積分の変数変換の際にヤコビ行列の行列式を用います．

質問： ヤコビ行列って何に使うんですかね. . . ? なんのために行列の形にしたんですか?

お答え： 使って見せたけど見てなかった?

質問： 偏微分，方向微分，全微分などいろいろな微分がありますが，化学や物理などでは用途によってそれぞれどのように使い分けるのですか?

お答え： 形容詞，形容動詞，助詞などさまざまな品詞がありますが，日常生活ではどのように使い分けるのですか? という質問に近い．場面を見て体で覚えるべきでしょう．第 6 回であげた「近似式の覚え方」として全微分はよく使われます．偏微分方程式の「ノイマン境界条件」は方向微分で表すし，偏微分は日常的な語彙です．

質問： 物理で「斜交座標」というものを用いた覚えがあるのですが，それは直交座標や極座標とは全く別のものなのでしょうか? それとも，とりらかと関連性があるのでしょうか．

お答え： 必ずしも直交するとは限らない，交わる 2 直線を座標軸とした座標系のこと．直交座標系は斜交座標系の特別な場合．共変成分・反変成分という微妙な議論が必要なので，ここでは一般論としてはあつかわない．

質問： どうして直交座標と極座標という 2 つの表し方があるのですか? どちらが先に生まれたのでしょうか?

お答え： 2 つだけではありません．座標のとりかたは無限通りあります．そのうち，とくに簡単なものがこの 2 つ．起こりはいつか，という問いは，どちらもあまりに古いので意味がないように思いますが，原理的には極座標の方が古いと思います．デカルト座標のアイディアがデカルトからどれくら遡れるか，ということかもしれません．

質問： $\sin^{-1} x$ の値域（原文では旁が成，もちろん間違い）は初めから $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ と決まっているのですか．（値域（これも間違い）が明記していない場合）．

お答え： 値域という言葉の使い方については講義資料 2 の「前回の補足」参照．$f(x) = \sin^{-1} x$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ の「像」は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ と定めています．ここでは講義ノート 4，定義 4.2 の約束どおりにこの記号を使います．

質問： x を 0 に近づけた時の $f(x)g(x)$ の極限値は $\lim_{x\to 0}\bigl(f(x)g(x)\bigr)$ と書かなければいけませんか? $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ と書くと $\Bigl(\lim_{x\to 0} f(x)\Bigr)\,g(x)$ と誤解されますか?

お答え： 前者のように書くのがよい．また，$\Bigl(\lim_{x\to 0} f(x)\Bigr)\,g(x)$ は $\Bigl(\lim_{t\to 0} f(t)\Bigr)\,g(x)$ と書くべきだと思います．

質問： 2 変数関数の連続性を調べるときは $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ として計算しましたが，3 変数関数のときは $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\cos\varphi$, $z = r\sin\theta$ (原文ママ，たぶん最後は θ ではなく φ) として計算すればよいのですか．また n 変数関数のときはどうするのでしょうか．

お答え： 2 変数関数の場合でも，いつも極座標で計算したわけではなかったと思います．極座標を使うのは，たくさんのやり方の中の一つ．3 変数でもそれは同様．多変数の極座標も考えられるがここでは扱わない．

質問： 前回の内容になりますが，勾配（原文は「勾」の中が「×」．山田が知らない文字）ベクトルについてもう少し補足の説明をしてください． **お答え：**講義ノート 39 ページ，問題 5-6．それ以上のことが知りたいということ?

質問： p53 の $0 = \frac{d}{dx}F(x,\varphi(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))\frac{dx}{dx} + \frac{dF}{dy}(x,\varphi(x))\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\frac{d\varphi(x)}{dx}$ の変形がよく理解できないです．（原文ママ，dF/dy は多分偏微分）

お答え：「よく理解できないです」という質問には「そうですか」としか答えようがありません．等号がいくつかありますが，どの変形がわからないのでしょう．まあ，少しは答えると $y = \varphi(x)$, $dx/dx = 1$.

質問： チェイン・ルールがいまいちよく分かりません．$\mathit{\Delta} f = f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}$ もよく分かりません．

お答え： そうですか，としかいいようがありません．「いまいち」については講義資料 2，6 ページ 11 行目参照.

質問： 教授の温かい人柄を見ていると，教授が悪魔に変貌するとは到底考えられません．ボクの目がおかしいのでしょうか? **お答え：**おかしいのです．