微分積分学第一 (8)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2014/calc1/

2014.06.04 (2014.06.11 **訂正**)

おしらせ

最初の授業でお知らせしましたように

2014年6月25日（水）
中間試験

を行います．

皆様おさそいあわせの上おいでください

ご意見から

ご意見 あの教室は飲食禁止ですか?

コメント はい

ご意見 高校に比べて進度が速く，演習の比率が少ない気がします．（微積演習を含めても）．

コメント だから自学自習の時間が必要なんですね．1 単位を得るためには 45 時間の学習が必要です．
大学設置基準 (21 条)

ご意見 テストが不安ですね．

コメント こわがらなくていいよ ♡

ご意見から

ご意見 演習の回答を探すのに徹夜しました．どう責任をとってくださるのですか!?

コメント 回答はどこにもありません．解答らしきものはありますが．

ご意見 問題の答えがみつかりません．できれば 2 週間後になったら答えを配って下さい．

コメント 嫌です．もう見つけた人がいるわけで，その情報をどうしてクラスで共有できないんですか．

ご意見 授業楽しいっす（迫真）

コメント 迫っているけど真じゃないのね．

質問

Q: 一次関数を除けば全てなめらかな曲線なのでしょうか．

A: 一次関数って曲線だったんですか? 一次関数のグラフは（この講義の意味で）なめらかな曲線ですが．
「全て」って何ですか．どの範囲で「全て」っていっていますか？
「グラフと関数を区別せよ」
「のぞいて全て，というときは考えている対象の範囲を限定せよ」いうのは

Q: 例の問題の $y = 0$ の点の分母が 0 となって微分できないのは図形を回転させて微分しても大丈夫ですか？

Q: 例に挙げられた楕円は $y = 0$ の点では分母（山田注：何の分母だ?）が 0 になって微分できないとのことですが，図形を 90° 回転させて微分出来なかった点を微分して求めたものは元の点を微分したものと扱って良いのですか?

A: 図形を微分? 点を微分?
微分するのは関数!

質問から

Q: （質問用紙の内容をみて）今年の 2 ルイの学生のイメージをひとことでお願いします!

A: 2 類のクラスを担当するのは初めてなので「今年の」2 類といわれても困るんです.

Q: 数学科の方々は皆山田先生のような人なのですか? (悪口ではもちろんなく)

A: 皆山田のように普通の人です.

Q: 先生は何をキッカケで "変態悪魔" と化したのですか?

A: さいしょから?

質問から

Q: **陰関数の微分公式**

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))}$$

について，分母の「$F_y(x,\varphi(x))$」をどうやって計算するのかがわかりません．$F(x,\varphi(x))$ は x だけの式ですが，それを y 方向に偏微分するというのはどういうことでしょうか．

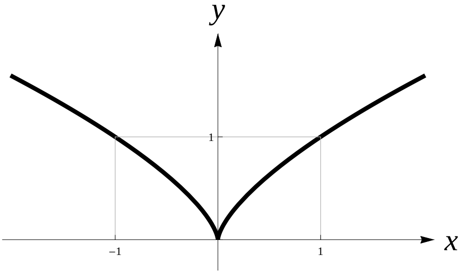
A: **たしかにわかりにくい部分ですね．$F(x,y)$ の y に関する偏導関数 $F_y(x,y)$ を計算して，y に $\varphi(x)$ を代入するという意味です．**

7-1

$$C = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$$

$$F(x, y) = x^2 - y^3, \qquad F_x = 2x, \qquad F_y = -3y^2$$

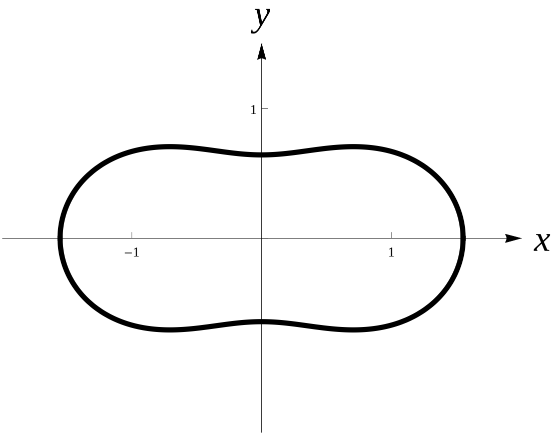
- $(0, 0) \in C$ **以外の点では** $(F_x, F_y) \neq (0, 0)$
- **原点以外の点の近くでなめらかな曲線**



7-4: Cassinian Oval

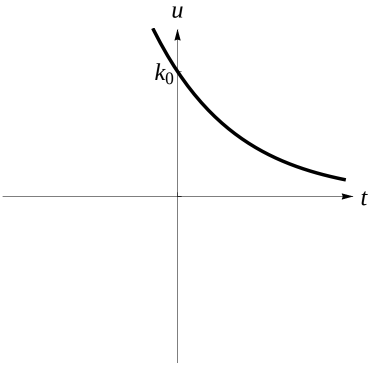
$$F(x,y) = 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2 - a, \quad C = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\}$$

$a = -1$



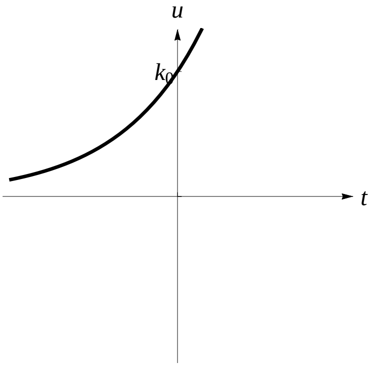
例 8.1

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u, \qquad u(0) = k_0 \quad (\lambda > 0); \qquad u(t) = k_0 \exp(-\lambda t)$$



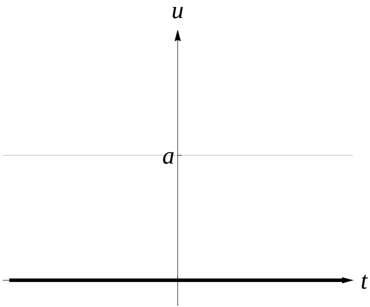
例 8.1

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \qquad u(0) = k_0 \quad (\lambda > 0); \qquad u(t) = k_0 \exp(\lambda t)$$



例 8.2: ロジスティック方程式

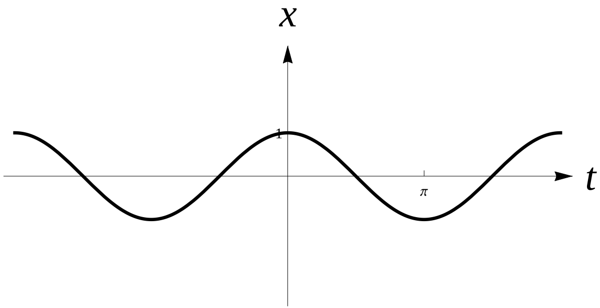
$$\frac{du}{dt} = \lambda u(a-u), \quad u(0) = u_0 \quad (\lambda, a > 0); \qquad u(t) = \frac{au_0}{u_0 + (a-u_0)e^{-a\lambda t}}$$



例 8.3; 問題 8-2; ばねの方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \qquad x(0) = a, \quad \frac{dx}{dt}(0) = b; \qquad (\gamma = 0)$$

$$x(t) = a\cos\omega t + \frac{b}{\omega}\sin\omega t$$

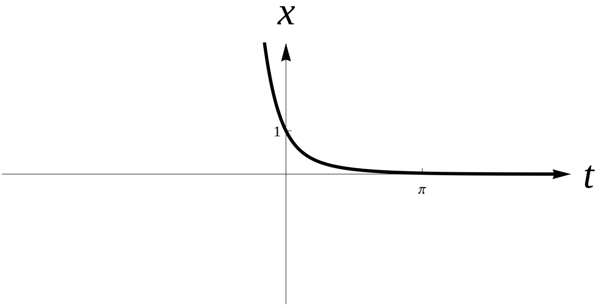


$\gamma = 0,\ \omega = 1,\ a = 1,\ b = 0$

例 8.3; 問題 8-2; ばねの方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \qquad x(0) = a, \quad \frac{dx}{dt}(0) = b; \qquad (\gamma^2 - \omega^2 > 0)$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(a\cosh\mu t + \frac{b+\gamma a}{\mu}\sinh\mu t\right), \quad (\mu = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})$$

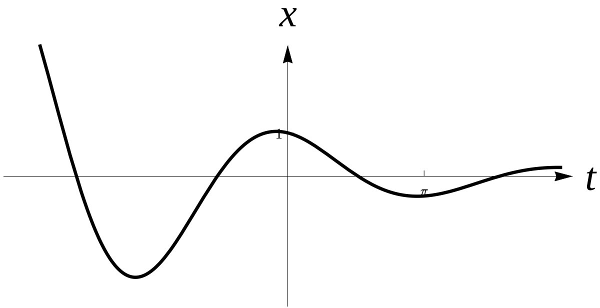


$$\gamma = 2,\ \omega = 1,\ a = 1,\ b + \gamma a = 0$$

例 8.3; 問題 8-2; ばねの方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \qquad x(0) = a, \quad \frac{dx}{dt}(0) = b; \qquad (\gamma^2 - \omega^2 < 0)$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(a\cos\mu t + \frac{b+\gamma a}{\mu}\sin\mu t\right), \quad (\mu = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2})$$

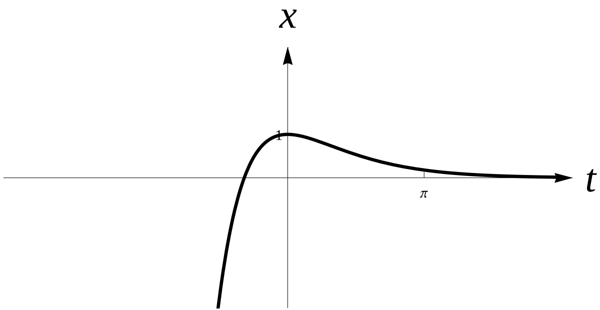


$$\gamma = \tfrac{1}{4},\ \omega = 1,\ a = 1,\ b + \gamma a = 0$$

例 8.3; 問題 8-2; ばねの方程式

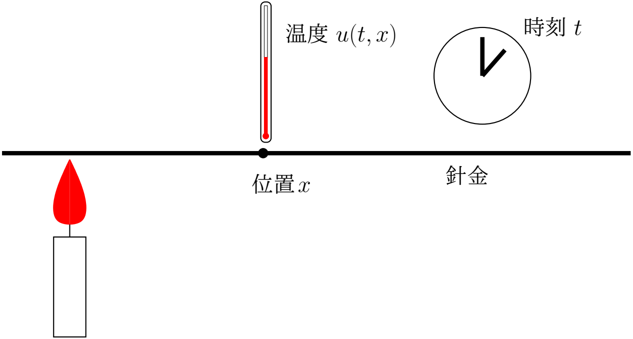
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \qquad x(0) = a, \quad \frac{dx}{dt}(0) = b; \qquad (\gamma^2 - \omega^2 = 0)$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\,(a + (b + \gamma a)t) \quad (\mu = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2})$$



$$\gamma = 1,\ \omega = 1,\ a = 1,\ b + \gamma a = 1$$

熱方程式



$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

$c=1$ の場合 (問題 2-2 参照)

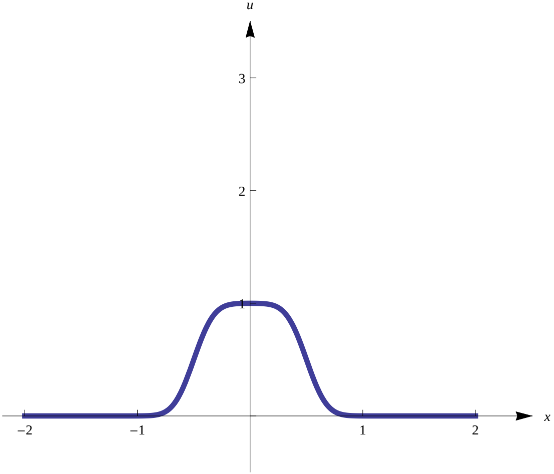
$$u_0(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t,x)\,dx = 1$$

グラフ; Gauss

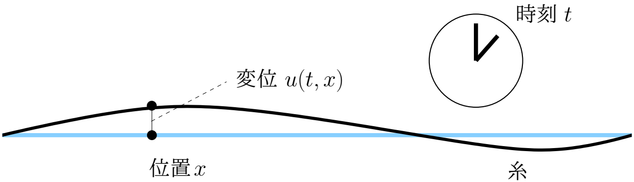
熱方程式

62 ページの例

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t, x-y) f(y)\, dy \Rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$



波動方程式



$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

一般解（d'Alembert の解；問題 6-2）

$$u(t,x) = F(x-ct) + G(x+ct)$$

$c = 1$ の場合（問題 2-3）

- $u(t,x) = \sin(t+x)$ 図 a
- $u(t,x) = \sin(t-x)$ 図 b
- $u(t,x) = \sin(t+x) + \sin(t-x)$ 図 c

James Clerk Maxwell (1831–1879)

おしらせ

最初の授業でお知らせしましたように

2014 年 6 月 11 日（水）

中間試験予告

を行います．

皆様おさそいあわせの上おいでください