2014 年 6 月 4 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 8

お知らせ

- 最初の時間に予告いたしましたように，来る 6 月 25 日に中間試験を行います．次回，6 月 11 日に「試験予告」をいたしますので，皆様お誘い合わせの上，お越しください．

前回の補足

- $f(x,y)=0$ が y について解けない場合があるか，という質問を複数いただきました．解けない場合がある，というのが楕円の例でやったこと．$F(x,y)=x^2+y^2-1$ とおくと $(x,y)=(0,1)$ を含むどんな領域をとっても，その領域で y について解けない．（x に対して 2 つの y が対応する場合が必ずあるので，y は x の関数にはなりません．
- たとえば $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ が $(1,0)$ の近くで y について解けない，ということについて $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ で「解けた」というわけにはいかないか，というようなご質問を複数いただきました．このとき x を決めると y はひとつ決まる，というわけではないので y は x の関数になりません．したがって $y=\varphi(x)$ という形にはとけない，ということ．この講義ではこれを「y についてとけない」ということにしています．

前回までの訂正

- 講義ノート，51 ページ 10 行目：C^∞ 級 ⇒ C^∞-級
- 講義ノート，51 ページ 12 行目：うまくれば ⇒ うまくとれば
- 講義ノート，51 ページ下から 2 行目：関してり返した ⇒ 関して折り返した
- 黒板にかいた，楕円の例で

$$-\left.\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}}\right| = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0} \qquad \Rightarrow \qquad -\left.\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

授業に関する御意見

- 今日は冷房がいい感じでした/教室寒いです/今回は教室が寒すぎました．
  山田のコメント： いろいろですね．
- スクリーンをカメラで映すとハウリングと同じ現象が起こると思います．それなのに何か普通に映っていませんか？私の気のせいかもしれませんが，何はともあれカメラの方長時間お疲れ様です．
  山田のコメント： コンピュータの画面は直接だしてますが，それじゃなくて?
- あの教室は飲食禁止ですか?　**山田のコメント：** はい．
- テストが不安ですね．　**山田のコメント：** こわがらなくていいよ ♡
- 高校に比べて進度が速く，演習の比率が少ない気がします．（微積演習を含めても）．
  山田のコメント： だから自学自習の時間が必要なんですね．1 単位を得るためには 45 時間の学習が必要です．（大学設置基準）
- 演習の回答を探すのに徹夜しました．どう責任をとってくださるのですか!?
  山田のコメント： 回答は出していません．解答（例）は出していますが．で，見つかったならよかったじゃない．
- 板書に講義ノートの対応箇所を書いてくださるのはとても助かります．'
  山田のコメント： そのための講義ノートなわけです．
- 最近ギャグキレッキレですね．　**山田のコメント：** きれてますか?
- いつも配布される講義ノートは先生が作っているのですか?　**山田のコメント：** はい．
- 授業楽しいっす（迫真）　**山田のコメント：** 迫っているけど真じゃないのね．
- オミクロンとオメガがどちらもオーに対応することは知らなかったです．恥ずかしくないようしっかり覚えます．
  山田のコメント： 知らない人も多いみたいです．
- 梅原先生と共著で本をかいてらっしゃるんですね．教授同士で仲が良い，悪いなどってあるのですか．差し支えなければ教えてください．
  山田のコメント： 梅原先生とは長いこと一緒に仕事をしています．仲がよい，悪いについては，普通の社会と同じ．
- 今回は特にありません．　**山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問： http://homepage3.nifty.com/rikei-index01/biseki/inkansuteiri.html のページに $y = f(x)$ の形で表される函数を『陽函数』といい，$f(x, y) = c$ (c は定数) の形で表される函数を『陰函数』という，と書かれているのですが，この解釈は間違いではないですか?　**お答え：**大丈夫です．陰関数という用語は厳密に定義があるわけではない（$f(x, y) = c$ が本当に y について解けるわけではないし）ような気がします．

質問： y について解くことが面倒な式なら，陰関数の微分は必要なくなりますか?

お答え： 面倒だから，具体的にとかなくても微分ができるという陰関数の微分公式はむしろ必要です．

質問： 陰関数定理では，十分条件しか与えられていなくて「判定するのは難しい」と書いてあるが，必要条件はないのか?　**お答え：**「...となる関数が存在する」のが必要十分条件だが，これではただの同語反復．1 点での微分だけでは判別できません．

質問： 陰関数の微分公式「$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))}$」について，分母の「$F_y(x, \varphi(x))$」をどうやって計算するのかがわかりません．$F(x, \varphi(x))$ は x だけの式ですが，それを y 方向に偏微分するというのはどういうことでしょうか．

お答え： たしかにわかりにくい部分ですね．$F(x, y)$ の y に関する偏導関数 $F_y(x, y)$ を計算して，y に $\varphi(x)$ を代入するという意味です．

質問： p 49 の例 7.1 (2) のように，与えられた x に対して対応する y が一般に一つに定まらない時 $F(x, y) = 0$ を $y = f(x)$ (定義域あり) の陰関数表示とは呼べないですよね．

お答え： 「$F(x, y) = 0$ がある関数の陰関数表示である」とはいえません．

質問： $F(x, y) = 0$ を y について解き $y = \varphi(x)$ の形になるとき $y = \varphi(x)$ は陰関数といいますが，x について解き，$x = r(y)$ の形になるとき $x = r(y)$ は何と言いますか．

お答え： $y = \varphi(x)$ は陰関数 $F(x, y) = 0$ を陽関数として表したといえる．$F(x, y) = 0$ は $y = \varphi(x)$ の陰関数表示，というのが正しい．ご質問の場合は「$F(x, y) = 0$ は $x = r(y)$ の陰関数表示」

質問： （略；講義ノート 51 ページ，10 行目から）というのはなめらかな曲線の定義ですか．

お答え： この文脈ではこれを定義とします．

質問： $F(x_0, y_0) = 0$ かつ $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ ならば (x_0, y_0) の近くで y についてとけ, $F(x_0, y_0) = 0$ かつ $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ ならば (x_0, y_0) の近くで x についてとけ，$F(x_0, y_0) = 0$ かつ $(F_x, F_y) \neq (0, 0)$ ならば (x_0, y_0) の近くで $F(x, y) = 0$ はなめらかな曲線を表すということが成立するので，(x_0, y_0) の近くで x についても y についても解けるならば，(x_0, y_0) の近くで $F(x, y) = 0$ はなめらかな曲線を表すということは成立しますか．

お答え： もちろん．条件は一方だけで良いので，もちろん両方みたしていれば十分です．

質問： プリントのなめらかな曲線の説明のなかで「...(略) なめらかな曲線であるということにする」とありますが，全微分可能であればその曲面は当点でなめらかだと認識していました．この定義の違いは "なめらかな曲線" という専門用語と専門用語の "なめらか" の違いでしょうか．あるいは陰関数表示可能な方程式の表す曲線に全微分という概念が適用できないがための違いなのでしょうか．

お答え： 「その曲面は当点でなめらか」と，曲面について述べているのに，それと「曲線」の議論を比較しているのでしょうか? 違う対象なので，比較の意味がないように思います．すこし「空気を読んで」みますと,「微分可能な関数のグラフは "なめらかな曲線"」は正しい（この講義では C^∞-級としているが)．しかし「なめらかな曲線は微分可能な関数のグラフ」は正しくない．例 7.5 の (2)．

質問： $F_x(x_0, y_0) = 0$, $F_y(x_0, y_0) = 0$ となるものでなめらかになる可能性があるといっていましたが，本当になめらかな曲線になりますか? ((x_0, y_0) の近くで)　**お答え：**注意 7.7.

質問： 「$(F_x, F_y) = 0$ (at (x_0, y_0)) ならば $F(x, y) = 0$ は (x_0, y_0) での接線の傾きをもたないから，なめらかな曲線ではないかもしれない」ととらえて，間違っている部分はありますか?

お答え： 「接線の傾きをもたない」という言葉の意味がよくわかりません．たとえば円 $x^2 + y^2 = 1$ の点 $(1, 0)$ における接線は直線 $x = 1$ で，これは「傾きをもたない」というのではないでしょうか．しかし円はなめらかな曲線です．したがって「接線の傾きをもたないから...」で結論にはつながらないと思います．

質問： 『$(F_x, F_y) \neq (0, 0)$ なら $F(x, y) = 0$ は (x_0, y_0) の近くでなめらかな曲線を表す』と板書に書かれてあったのですが，それがなぜ成り立つかがわかりません．教えて下さい．

お答え： $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ なら (x_0, y_0) の近くで $F(x, y) = 0$ はグラフ $y = f(x)$ の形で書ける（陰関数定理)．$F_x(x_0, y_0) \neq 0$ なら (x_0, y_0) の近くで $F(x, y) = 0$ はグラフ $x = g(y)$ の形で書ける．

質問： 講義ノート p 51 のなめらかな曲線のところについて,「C をなめらかな曲線であるという」というのは「関数が連続である」というのの陰関数バージョンですか? 変なことを聞いた自覚はあります．すいません．

お答え： いいえ．連続関数のグラフでなめらかな曲線にならない例は知っていますよね．

質問： p 52 に関数 $F(x,y)=2(x^2-y^2)-(x^2+y^2)^2$ （レムニスケート）が $(x,y)=(0,0)$ の近くをのぞいてなめらかな曲線ということがわかりません．また $(x,y)=(0,0)$ の近くではなぜなめらかな曲線と言えないのですか．p 51 には「$\dots P$ を含む $\mathbb{R}^2$ の領域 U をとれば，C と U の共通部分 $C\cap U$ が C^∞-関数のグラフと合同となるとき C は P の近くでなめらかな曲線である」と書かれていますが，U に当たる部分はなぜ $(x,y)=(0,0)$ の近くでとれないのですか．逆に $(x,y)=(0,0)$ をのぞいた部分はどんな C^∞-級関数と合同ですか．（p 51 の例 7.5 の「$\dots C^\infty$-級関数 $\sqrt{1-x^2}$ $(-1<x<1)$ のグラフと合同である」のようにどう書けるのですか）

お答え： ご質問は「曲線 $F(x,y)=0$ は」という意味ですよね．この式を y^2 について解くと $y^2=-(x^2+1)+\sqrt{4x^2+1}$ となります.（2 次方程式の根の公式の $-\sqrt{\dots}$ の部分は $y^2\geqq 0$ から排除されます.）とくに $x=0$ のとき $y=0$ ですが，x が十分 0 に近いとき，対応する y は 0 に近い正負の 2 つの値をとります．したがって $(0,0)$ の周りにどんなに小さい「丸」を描いても 0 に近い x に対して y が 2 つ定まってしまい，関数のグラフになりません．x と y の役割を変えても同様なので，なめらかな曲線とは言えません．それ以外，たとえば (x_0,y_0) が第一象限の点なば $U=\{(x,y)\,|\,x>0,y>0\}$ とすれば，考えている曲線 C と U の共通部分は $f(x)=\sqrt{-(x^2+1)+\sqrt{4x^2+1}}$ のグラフとなります．

質問： 問題 7-4 の解きかたの見当がつかないのですが，$F_y\neq 0$ の範囲で y についてといて，といた式の増減を調べれば良いのですか?

お答え： それで大丈夫です．しかし，とかなくても「解けたとして」微分を計算できる，というのが陰関数の微分公式です．

質問： 講義の最後の方で示していた $\frac{\partial\xi}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x}$ について今一度解説してください．

お答え： 問題 7-5 ですね．$F(\xi(y,z),y,z)$ を y で偏微分するとこの式が得られる．計算は命題 7.9 の証明を真似する．

質問： おまけの部分で ξ が x, η が y, ζ が z に対応して置き変っているのですが，理由がわかりません．$\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial z}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ が $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$ になるのがわかりません．

お答え： 1 変数関数 $y=f(x)$ の導関数を $\frac{df}{dx}$ と書きますが，従属変数の記号 y を用いて $\frac{dy}{dx}$ と書くこともありますね．ご質問の文脈でも同様で関数 $x=\xi(y,x)$ の従属変数 x を用いて $\frac{\partial\xi}{\partial y}$ を $\frac{\partial x}{\partial y}$ と書いたのです．

質問： $F(P,V,T)=0$ となる関数 F があれば，$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}=-1$ が成り立つということでしたが，$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}=-1$ に条件を加えれば関数 F は求まるのでしょうか．

お答え： ご質問の式は一般的に成り立ってしまうので，F に関する何の条件にもなっていません．したがって F を決めるための条件はフルに設定する必要があります．

質問： 提示資料の「逆写像」のところで $F\circ G=\mathrm{id}_U$, $G\circ F=\mathrm{id}_D$ のとき $G=F^{-1}$, $F=G^{-1}$ としていたのは，一般には $G=F^{-1}\Leftrightarrow F=G^{-1}$ ではないからなのでしょうか．もしそうであれば，次の「合成関数と逆関数の微分公式」のところで「$G=F^{-1}$ という状況では $d(F\circ G)=d\,\mathrm{id}_U=E$, $d(G\circ F)=d\,\mathrm{id}_D=E$ となっているのはなぜですか．この場合も $F=G^{-1}$ という条件は必要ないのでしょうか．

お答え： 「$F\circ G=\mathrm{id}_U$ かつ $G\circ F=\mathrm{id}_D$」が $G=F^{-1}$ の定義です．この定義は F と G に関して対称ですから，$G=F^{-1}$ ならば自動的に $F=G^{-1}$ が成り立ちます．

質問： 授業の中で「$\frac{d}{dx}\bigl(F(x,y(x))\bigr)=\frac{dx}{dx}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{dy}{dx}\frac{\partial F}{\partial y}$」とありましたが，最初に学んだ時の書き方だと，「$\frac{d}{dx}\bigl(F(x,y(x))\bigr)=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}$」となります．$d$ と ∂ の書く順番を変えているのには何か理由があるのでしょうか．

お答え： とりあえずないです．

質問： 「$x=y=0$ とならない」は数式だけで表すとしたらどう書けばいいのでしょうか．

お答え： $(x,y)\neq(0,0)$.

質問： 作用素とはいったいどういう概念なのでしょうか? 信じておけば何かしらご利益があるものと思っておけばよいでしょうか．

お答え： 気分として少し違うが「写像」とほぼ同義．たとえばラプラス作用素は，C^∞-級関数全体の集合からそれ自身への写像と思えます．Dirac 作用素なんて聞いたことない?

質問： $x=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$ は $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ の陰関数とは言わないのですか?

お答え： むしろ陽関数では?

質問： C^r-級部分多様体について，定義するのは大変であると描いてありますが，特に知らなくても生活に支障はでないということでしょうか.

お答え： それは「あなたの生活」によります．明言できるのは「この講義の範囲を超える」.

質問： 講義ノート P 54 の "一般の陰関数定理" で，C^r-級の r はどういう意味でしょうか．無限という意味でしょうか?

お答え： r は正の整数または ∞ です.

質問： 微分可能性はあまり気にする必要がないと言っていたような気がしたのですが，ではどのようなときに考えますか?

お答え： よく出会う状況では「暗黙のうちに仮定されている」．でも「変態な場合」があるので，そういうときに気にしましょう.

質問： 閉区間 I とは何の略でしょうか.

お答え： 講義ノート 2 ページ脚注 8.

質問： 構義ノート（原文ママ：講義ノートのことか）例 7.5 で $U := \{(x,y)|y > 0\}$ とありますが，$:=$ の意味は $=$ (イコール）以外にありますか. **お答え：**講義資料 6, 3 ページ，下から 2 行目.

質問： 現時点では任意の曲線をなめらかであるかないかを判断することはできますか.

お答え： 実は「曲線」という語を定義していないので，「任意の曲線」が意味をなしません．講義ノートで定義したのは「なめらかな曲線」だけ.

質問： $f(x,y) = 0$ が y についてとけるか否かを簡単に判定することはできますか? **お答え：**それが陰関数定理 7.2.

質問： $F(x,y) = 0$ について，結局 $y = \varphi(x)$ の形に直して微分を考察しているのですよね.

お答え： 何を言っているのかわかりません．$F(x,y) = 0$ という式はそれだけでは微分を考察していることにはなっていません.

質問： $F(x,y), y = \varphi(x)$ について $\varphi'(x)$ が存在すると，$F(x,y)$ が y について解けるというのはなぜですか?

お答え： なんだろう．これ．$y = \varphi(x)$ と書けた時点で y について解けているわけです．だから，$\varphi'(x)$ の存在とは「解けた上で」の議論なので，ご質問の文は意味をなさないことになりますね.

質問： 一次関数を除けば全てなめらかな曲線なのでしょうか.

お答え： 一次関数って曲線だったんですか? 一次関数の グラフは（この講義の意味で）なめらかな曲線ですが.「全て」って何ですか．どの範囲で「全て」っていっていますか？「グラフと関数を区別せよ」,「のぞいて全て，というときは考えている対象の範囲を限定せよ」というのは最初の授業で扱ったことですよね.

質問： 例の問題の $y = 0$ の点の分母が 0 となって微分できないのは図形を回転させて微分しても大丈夫ですか？

お答え： これだけでは何をいっているか分かりません.「図形を微分する」って何ですか？

質問： 例に挙げられた楕円は $y = 0$ の点では分母（山田注：何の分母だ?）が 0 になって微分できないとのことですが，図形を 90° 回転させて微分出来なかった点を微分して求めたものは元の点を微分したものと扱って良いのですか?

お答え： 「点を微分する」とはどういうことでしょうか? $x = g(y)$ と表せば $g'(0) = 0$ ですが，それは何を表していると思いますか.

質問： p. 57 (8.2) で，$\frac{du}{dt}(t)$ と $\lambda u(t)$ は別物という風に読んだのですが，$\frac{du}{dt} = -\lambda u$ だったので同じものではないのかなと思ってしまいました．$\frac{du}{dt}(t)$ と $\frac{du}{dt}$, $\lambda u(t)$ と λu はそれぞれ異なりますか.

お答え： 前半：別物を「等しい」とおくことではじめて方程式ができる．後半：独立変数を面倒くさいので省略しただけ．同じものです.

質問： （質問用紙の内容をみて）今年の 2 ルイの学生のイメージをひとことでお願いします!

お答え： 2 類のクラスを担当するのは初めてなので「今年の」2 類といわれても困るんです.

質問： 問題の答えがみつかりません．できれば 2 週間後になったら答えを配って下さい.

お答え： 嫌です．もう見つけた人がいるわけで，その情報をどうしてクラスで共有できないんですか.

質問： 数学科の方々は皆山田先生のような人なのですか? (悪口ではもちろんなく)

お答え： 皆山田のように普通の人です.

質問： 先生は何をキッカケで "変態悪魔" と化したのですか? **お答え：**さいしょから?