2014 年 6 月 11 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 9

中間試験を **6 月 25 日** に実施します．詳細は本日配布する「中間試験予告」をご覧ください．

前回の補足

- 複数の方からの質問：「この用紙で 3 点をとる質問はどのようなものですか？」講義の内容を聞き取り，講義資料を読み込んで（ある程度正しく聞き取れ，読み取れていることが前提），自分で考えた上で疑問点が伝わるように書かれていれば 3 点だします．

前回までの訂正

- 前回の提示資料，16 ページ；図のキャプション：$\gamma = \frac{1}{4} \Rightarrow \gamma = 1$.
- 前回の提示資料の Cassinian Oval: 問題 7-3 ではなく 7-4.

授業に関する御意見

- なぜ温度の差を新たな量として決めないのでしょうか？ 基準が違うのって実はわかりにくいのでは．．．？ あと，今日の教室の寒さはいつもより甚だしい!!
  山田のコメント： その「いつも」という部分の基準をどうきめるか，というわけです．もちろん「絶対零度」があるから，それを基準にしてもいいのですが．「今日は 300K でちょっとあついね」
- 暑くなるにつれ薄着になってきたので，空調を少し弱めにしえくれると（とくに授業終盤）ありがたいです． **山田のコメント：** 了解．
- 面白い喩えがよく話に出てきますが，いつどこでネタを拾っているのですか？ **山田のコメント：** 普通に生活しているといつでもどこでも，ネタがおちています（誰にとっての普通だ?）
- 今回は例が多く天下り的な公式が多かったですね？ **山田のコメント：** ですね．
- 微分方程式の一般的な解法はいつどの授業でやるのですか？ できれば少しやってほしいです． **山田のコメント：** たとえば二年生の「工業数学」．後期に少しだけ線型常微分方程式とその解法を扱いますが，多分工学部でならう標準的な方法とすこし違います．いずれにせよこれだけで 1 学期分の内容を用意することができますので，この科目には荷が重すぎます．なお「一般的な解法」はありません．
- 授業中におっしゃっていた無責任な話をお願いします． **山田のコメント：** 無責任者としては，もちろんそのつもり．
- 演習にちょうどよい参考書はありますか？（解答がわかりやすい） **山田のコメント：** テキスト，講義ノートではだめですか．おすすめとして，書店や図書館で 10 冊以上比べてみてください．一般に，アメリカの低学年用の教科書は問題がたくさんあってたのしい．たとえば Shaum's outline series (McGraw Hill) など．
- どの学問をするにしても必須になると思うので，しっかり復習したいです． **山田のコメント：** そうしてください．
- ロジスティック方程式にゴキブリの個体数の増加減少は従わないと思うのですが，先生はどう思いますか？
  山田のコメント： 結構あてはまるようです（文献を見つけきれませんでした）．従わない，と思う理由はなんでしょう．
- 口はくさくないはずです． **山田のコメント：** そう？
- 授業中，先生のサスペンダーの肩ひもが落ちてきていることが気になるのですが，ゆるめにしてあるのですか?? **山田のコメント：** 実は肩の方がゆるめです．
- 今日の範囲はテスト範囲ですか？ **山田のコメント：** はい．
- e^{x^2} の原始関数 **山田のコメント：** は?

質問と回答

質問： $\frac{du}{dt} = -\lambda u$ と初期条件の $u(t_0) = u_0$ とした時，$u(t) = u_0 e^{\lambda t}$ となっていました（原文ママ；この解に あるためには初期条件を $u(0) = u_0$ としなければならない）が，計算途中としては，変数分離を行ったと考えてもいいんですか? 授業では計算式が省いていた（山田注：省かれていた?）と思えたので回答をお願いします．

お答え： 講義ノートでは，「$u(t) = u_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$ が解であること，他に解がないこと」を示しています（これで十分）．「変数分離」に相当することは，例 8.2．これに倣って（自己流ではなく）ご質問の方程式をといてごらんなさい．

質問： the Logistic equation の解き方をお願いします． **お答え：**例 8.2.

質問： 2 階常微分方程式の解はどのような方針（山田注：「針」の字が原文では金偏に斗）で解を求めていけばいいのかが分からないです． **お答え：**すべての 2 階常微分方程式に通用する方法はありません．

質問： 微分方程式について，高校の物理で教科書の範囲外ではありますが，簡単なやつをやりました．微分方程式の解法は，それぞれ 1 つ 1 つに決まった解き方があって，1 つ 1 つを公式として覚えていくべきですか?

お答え： ある種の方程式（たとえば線型定数係数常微分方程式）には一般的な解き方があるが，一般論として微分方程式の解き方はありません．解が初等関数で表されないような微分方程式はたくさんありますし，そもそも解を積分の形で表せないようなものもあります．パターンに当てはまらないものは各個撃破でやってみるのだと思います．

質問： 三角関数や指数関数が解となる微分方程式の解法をみていて，既知として解いているように感じました．微分方程式は考えて解く，計算していくと答えが導けるといったものではないということでしょうか．

お答え： 指数的成長・減衰や単振動の方程式の解は常識として知るべきですが，例 8.2 は計算して解いてません?

質問： 例 8.4 の $f''(t) + \frac{p}{t} f'(t) = 0$, $f(1) = \alpha$, $f'(1) = \beta$ から（山田注：講義ノート 59 ページの式）への変形の仕方が自分ではできなかったので，教えてください． **お答え：**ヒントはチェックした? 方程式は $\{t^p f'(t)\}' = 0$ と同値だから，$t^p f'(t)$ が一定．$f'(1) = \beta$ から $t^p f'(t) = \beta$，すなわち $f'(t) = \beta t^{-p}$．$f(1) = \alpha$ から結論を得る．

質問： 例 8.4 でなぜ方程式を $\{t^p f'(t)\} = 0$（原文ママ：中括弧の外にプライム（$'$）があるはず）と書きかえられるのでしょうか? また，なぜこのように書きかえると $f(t)$ がわかるのでしょうか? 解き方を教えて下さい．

お答え： 問題の方程式に t^p をかけると左辺が $t^p f(t)$ の微分になることがすぐにわかる．後半はひとつ前の回答参照．

質問： 例 8.4 の（略）の解き方がわかりません．この問題では $\{t^p f'(t)\}' = 0$ と書き換えることは知識として持つべきなのか，経験的に知っておくべき結果なのですか？ また，例 8.5 についてですが，u が回転対称の場合，$u = \alpha + \beta \log \sqrt{x^2+y^2}$ になることが分かりませんでした．$u = \alpha + \beta \log \sqrt{x^2+y^2}$ と例 8.4 の $p = 1$ のときの $f(t) = \alpha + \beta \log t$ がどう対応しているのかわかりません．$f(t)$ が u, t が $\sqrt{x^2+y^2}$ にあたるのなら p が例 8.5 での何にあたりますか． **お答え：**前半：「じっと見ていれば気づく」．後半：$F(r) = F(\sqrt{x^2+y^2})$ が調和関数なら，例 6.9/6.10 から $\Delta F = F_{rr} + \frac{1}{r}F_r = 0$．この $F(r)$ に関する常微分方程式は，例 8.4 の $p = -1$ の場合．

質問： 物理の講義で「微分方程式は様々な形が出てくるので，その都度解けるようにすることと」と言われたのですが，そうなのですか？ **お答え：**そうですね．

質問： 微分方程式は私自身が解けるようになる必要はないのですか？ **お答え：**無論必要．この授業の範囲でないだけ．

質問： 正直，講義ノートにあげられている熱方程式などの偏微分方程式の解を求めることができる気がしないのですが，昔のえらい人が求めてくれたと考えて，ある程度解を覚えてしまう方がいまのうちは良いのでしょうか． **お答え：**発見的に解かなければならない義理はありません．

質問： 初期条件を式に組み込むとき（言い方が（日本語が）まちがっていますが；山田注：間違っているとわかっているなら正しい言い方を考えなさい）例えば $\frac{du}{dt} = -\lambda u$ の解が $u(t) = ke^{-\lambda t}$ であり，$t = t_0$ において $u(t_0) = k_0$ となる時 $u(t) = k_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$ とするのは，$t = t_0$ で k_0 となるようにつじつまをあわせる，という感覚でいいですか．そうすると，もっと複雑な微分方程式になったとき，初期条件を組み込むときに，いろいろな形の式になってしまう様なことはおこらないのですか． **お答え：**前半：いいです．後半：「初期条件で解が 1 つに定まらない」ことを心配していますね．よくある問題では，初期条件から解はただ 1 つ定まります．そうでない「変態」は後期に．

質問： $\frac{du}{dt} = -\lambda u$ の解が $u(t) = ke^{-\lambda t}$ であることの必要十分性はどうやって示すのですか?

お答え： 必要と十分と，どちらが自明（実は講義や講義ノートで示されている）ですか?

質問： $u(t) = ke^{-\lambda t}$ が $\frac{du}{dt} = -\lambda u$ の解であることの示し方がわかりません． **お答え：**左辺と右辺に代入して比較．

質問： 高校までに触れた微分方程式で $\frac{d^2u}{dt^2} = \alpha u$ (α: 定数) の解が $\sin\theta$ もしくは $\cos\theta$ （山田注：間違っていますが原文ママ）であると習いました．これは単に経験則でしかわからないのですか? 後にならう一般解で導出できるのでしょうか．($\log$ や e^x などの様々な関数が 1 つの一般解で表されるとは考えにくいです)．

お答え： $\alpha > 0$ の状況のもと，ご質問の方程式の一般解は $u(t) = A\cos(\sqrt{\alpha}t) + B\sin(\sqrt{\alpha}t)$ (A, B は定数) です．この形を導く方法はたくさんありますが，どうやって導いても結論は常識として知っていて下さい．

質問： 常（偏）微分方程式，例えばばねに観する常微分方程式「(略)」は実験による実験値から出された関係式と考えてよいのでしょうか． **お答え：**フックの法則は経験則でしょうか．ニュートンの運動の第二法則は?

質問： バネの振動の微分方程式は運動方程式から導けるものなのですか? **お答え：**運動方程式そのもの．力学で習う．

質問： マヨネーズの中でばねを振動させると空気中の振動とは異なるとおっしゃいましたが，マヨネーズの抵抗は $-\rho'\frac{dx}{dt}$ ($\rho' > 0$ は定数) と表せないのでしょうか? **お答え：**マヨネーズのような「非ニュートン流体」の抵抗力は速度に比例しない（たとえば速度の 2 乗に比例する）ことが知られているようです．

質問： 微分方程式の連立方程式は，未知関数と同じ数の方程式をたてなければ解くことができないのですか?

お答え： 「解が定まらないのですか」という意味であれば，だいたいそう．「だいたい」の意味を説明するには言葉をすこし用意しなければならないが，ここでは「そうです」と思っていただいて結構です．

質問： （空気抵抗）$= kv$ なので，落下中の物体の運動方程式は $m\frac{dv}{dt} = mg - kv$．はっ．これは微分方程式．今回の授業内容で解けるわけですね． **お答え：**例 8.2 にあるのと同じ方法で解けます．

質問： 常微分方程式の解は一意的に定まるとありましたが，偏微分方程式の解は定まらないのですか？

お答え： 常微分方程式の解の一意性は「適切な仮定のもと」成り立ちます．ここに挙げた例であれば「初期値を変える毎に解が異なる」ので，何も注釈なしに「常微分方程式の解は一意的」は誤り．同様に偏微分方程式も条件なしには解の一意性は言えませんが（講義ノート 63 ページの波動方程式，d'Alembert の解は，任意の関数を 2 つも含んでいる），しかるべき条件（初期条件を関数で与えるとか，境界条件を関数で与えるとか，常微分方程式よりも与えなければならない条件は多い）を与えると一意性が成り立つ場合があります．

質問： 例 8.3 では初期条件は $x(t_0)$, $\frac{dx}{dt}(t_0)$ の値を知っておく必要がありましたが，一般に常微分方程式 $\alpha_n\frac{d^nx}{dt^2} + \alpha_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + \alpha_1\frac{dx}{dt} + \alpha_0 = 0$ (α_n, α_{n-1},..., α_0: const) の解は初期条件として $x(t_0)$, $\frac{dx}{dt}(x_0)$,..., $\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t_0)$ の値を条件とすることで定まりますか? **お答え：**はい．

質問： 初期条件は微分方程式に $\frac{d^nx}{dt^n}$（与えられた方程式で n はその最大値とする）が含まれていれば n 個必要ということでよろしいのでしょうか． **お答え：**はい．n は「微分方程式に含まれる未知関数の微分の最大の階数」ですね．

質問： 変態な関数は微分方程式で解が 1 つに定まらないとおっしゃいましたが，プリントには「常微分方程式の解の一意性」とあるのですか． **お答え：**題目として書いていますが「常微分方程式の解の一意性」の定理には「仮定」があります．ちょっと変態な方程式はこの仮定を満たしません．

質問： 2 階偏微分方程式の場合，例えば $a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c\frac{\partial u}{\partial x}+d\frac{\partial u}{\partial y}+eu=0$ の場合，初期条件は $u(x_0,y_0)=u_0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\alpha$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=\beta$ （u_0, α, β は定数) で正しいですか? **お答え：**いいえ．たとえば波動方程式（講義ノート 63 ページ）の d'Alembert の解に含まれる 2 つの任意関数 F, G を決定するには，この条件では決定的にデータが足りません．ところで，なぜご質問の方程式には $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ の形の項を入れないのでしょうか．

質問： (8.13) についてです．$u(t,x)$ について $t\to 0$ とすると大体 f になるというのはどういうことでしょうか．“今回はしない” とのことですが 6/11 の授業で教えて欲しいです． / $t\to 0$ とすると “大体” f に近づくとありますが，この近似はどのようなものですか? **お答え：**近似ではなく f に**平均収束**する．「$u(t,x)$ が $t\to 0$ のとき x の関数 $u_0(x)$ に近づく」の意味は何通りもあり，平均収束はその一つだが，時間に余裕があれば後期に扱う．

質問： 8.1 の問題は $u(0)=ke^0=k$, $u(30.17)=ke^{-30.17\lambda}=\frac{1}{2}u(0)$ となるため，$\frac{1}{2}=e^{-30.17\lambda}$ より $\lambda=\frac{-\log 2}{-30.17}=9.9777\times 10^{-3}\fallingdotseq 9.978\times 10^{-3}$ となったのですが，このとき (8.1) は $\frac{du}{dt}=-\lambda u$ (λ は正の定数）とあるため，単位はないのでしょうか？（日本語が拙くてすみません）

お答え： **答えが間違っています．**理由は電卓の使い方の間違い．大抵の関数電卓では log は常用対数，自然対数は ln. ご質問の内容について：u は質量の次元をもつ物理量，du/dt は u が変化する速度なので 質量/時間 の次元をつ．したがって，$\lambda=(-du/dt)/u$ は 1/時間 の次元をもつが，半減期の単位が年なので，λ 単位は 1/年 となります．

質問： 常微分方程式の「常」というのは偏微分方程式との区別を明確にするための言葉と考えてよいのでしょうか． **お答え：**はい．

質問： 微分方程式は積分して解くのに，なぜ積分方程式とは言わないのか．与式が微分の形で表されているから微分方程式で，与式が積分で表されていたら積分方程式と呼ぶのか? **お答え：**前半：二次方程式は平方根でとくのになぜ平方根方程式といわないのか．後半：未知関数の導関数を含むのが微分方程式，積分を含むのが積分方程式．

質問： 講義ノート p. 60 のポアソン方程式のところで $\varDelta w=\rho$ (ρ は既知関数) となるのがポアソン方程式の定義だとありますが，この $\varDelta$ はラプラス作用素のことですか? **お答え：**はい．

質問： p 60, 3 行目の「u (w) は調和関数」というのは，u と w は調和関数という意味ですか，それとも合成関数ですか． **お答え：**この文脈では「2 変数関数 u が $\varDelta u=0$ を満たすとき u を調和関数，3 変数関数 w が $\varDelta w=0$ を満たすとき w を調和関数という」という文の略記．英文では The function $u=u(x,y)$ (resp. $w=w(x,y,z)$) is called a *harmonic function* if $\varDelta u=0$ (resp. $\varDelta w=0$) holds. と “respective” を使う．

質問： p63 の弦の振動と波動方程式のところで，$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ と表せるとありますが，u を x で 2 階微分したとき $\varDelta$ で u を t で 2 階微分しているときは $\varDelta$ で表してないです．これは位置を表す変数でないので $\varDelta$ で表せないということですか． **お答え：**読み間違い．「熱方程式と同様に平面や空間の」に従い，平面や空間の熱方程式（62 ページの下）を見よ．平面の熱方程式では未知関数は $u(t,x,y)$，ラプラシアンは (x,y) に関するラプラシアン，すなわち $\varDelta u=u_{xx}+u_{yy}$ と明記されてるのでこれと同様．ヒントは，次の行の「太鼓の膜の振動や空間の波動」．

質問： 講義ノートの p 63 の上の方に $\varDelta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ とありますが，これは単なる省略形ですか．それとも他に意味があるのですか． **お答え：**関数 f に対して関数 $\varDelta f$ を対応させる規則を $\varDelta$ と書いている．

質問： $F(\sqrt{x^2+y^2})$ の形に表されるとき，極座標 $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ を用いると，$F(\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2})=F(r)$ となるため，u が回転対称なる u は r だけの関数で θ によらないということであってますか．

お答え： $F(r)$ の形でかけるのが回転対称な関数．とくに $r=\sqrt{x^2+y^2}$ は当たり前なので，これは当たり前．

質問： p. 60 $w=F(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ がスカラ場というのは $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ が長さを表すからと考えていいですか?

お答え： いいえ．スカラ場の意味は講義ノート第 1 回．F の値がスカラだからです．

質問： 線型微分方程式と非線形微分方程式がありますが，非線形微分方程式で物理学に応用されているものはありますか? **お答え：**あまたある．常微分方程式では，振り子の運動方程式，天体の運動方程式，ロジスティック方程式，偏微分方程式では，ナヴィエ・ストークス方程式，重力場の方程式，KdV 方程式，極小曲面の方程式などなど．

質問： $F(x,y)=0$ が $y=\varphi(x)$ の形で表せる $\Leftrightarrow$ 陽関数表示可能 $\Rightarrow$ なめらかな曲線，で正しいですか? **お答え：**はい．

質問： 陽関数とは $x=\varphi(y)$ の形でもいいのですか? **お答え：**「x は y の陽関数として表される」といいます．

質問： 「二回微分」と「二階微分」はどちらも使われていると思うのですが，この差はなんでしょうか? **お答え：**とくにない．

質問： 常微分方程式の説明の際，初期条件 $\frac{du}{dt}=-\lambda u$, $u(t_0)=u_0$ である（山田注：初期条件は原文ママ，初期値問題のことを言っているか?）微分方程式の答え（山田注：解のことか）は $u(t)=u_0e^{-\lambda(t-t_0)}$ であり，「これは天下りです」とおっしゃっていました．“天下り” とはどういう意味で使われているのですか?

お答え： 広辞苑には「天孫降臨」と「官僚の天下り」の 2 つしか載ってっていませんね．「なぜか知らないけれど，. . . とおくとうまくいく」とき「天下り式に. . . とすると」といいます．(cf. `http://okwave.jp/qa/q6420930.html`)

質問： 板書で「$F_y \neq 0$ となる点のち各で C は $y = \varphi(x)$ とグラフ表示できる」$F(x,y) = x^2 - y^3$ $\{(x,y)|F(x,y) = 0\} = C$, $F_x = 2x$, $F_y = -3y^2$ とありましたが，よくわかりませんでした．

お答え： この状況で $F_x = 2x$, $F_y = -3y^2$ はあたりまえだと思いますが，どこがわからないのでしょう．

質問： $u(t) = \frac{au_0}{u_0+(a-u_0)e^{-a\lambda t}}$ の求め方を知りたいです． **お答え：**講義ノート p. 58, 14 行目を $u(T)$ について解く．

質問： 式 (8.7) において $m\frac{d^2x}{dt^2}$ は何を表していますか? **お答え：**定数 m と x の 2 次導関数の積．

質問： $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ とありますが U の二回微分を足すのですか? **お答え：**第 2 回の問題で既出．やってみた?

質問： 次回ラプラスの方程式等も扱ってほしいです． **お答え：**講義ノートの内容をフォローした上で，質問をどうぞ．

質問： 講義ノート p57 の冒頭にて「微分方程式の一般論はここでは扱わない」とありますが，それはなぜでしょうか?

お答え： この授業の主題ではないから．もし一般論をやるなら，それだけで 1 学期分は必要．

質問： 講義資料のはじめに「現象がどのような微分方程式で表されるか〜守備範囲外である」とありますが，後半で扱われている熱方程式や波動方程式はその類のものではないですか？ **お答え：**前半の放射性物質の崩壊や生物の個体数の変化，バネの振動に言及しないのはなぜ? 現象が，これらの方程式で表される理由はこの講義の守備範囲外．

質問： 熱方程式（略）が経験から導き出されたのがすごいです．t についての微分と x についての 2 回微分の関係に着目した経緯はあるのですか? **お答え：**それは物理学で学ぶべきことですね．

質問： フーリエ解析やオイラーの等式は（オイラーの等式は演習題（原文ママ）でちらっとでてきた）この講義でやるのですか? **お答え：**いいえ．

質問： 先生なら微分方程式をわざわざ解かなくても変化の様子がだいたいわかるのですか． **お答え：**方程式を解かないで方程式の形から分かることと，解いて初めてわかること，両方があり，それぞれ性質が異るような気がします．

質問： $\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ について t が定数のときでも微分可能とあったのですが，定数で微分することは可能なのですか．

お答え： ちょっと文脈がわかりませんが，t を定数として x の関数として微分可能?

質問： フライパンの (x,y) 時刻 t における温度を $u(t,x,y)$ とすると，$\frac{\partial u}{\partial t} = c\Delta u$ をみたす．この後 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ となる理由がわかりません． **お答え：**「この後」ということですが，それまでのところは分かるのでしょうか．すなわち前の式の Δu の記号の意味までおわかりでしょうか? $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ はご質問の式の記号の説明です．Δ の意味をこうしているということ．むしろ，このフレーズがなければご質問の式が意味不明になると思いますが．

質問： p. 62 $\frac{\partial u}{\partial t} = c\Delta u$ を $u_t = c(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r)$ と書き換える手順がわかりませんでした．解説がほしいです．

お答え： 第 6 回授業にしたがって平面のラプラシアンを極座標し，u が θ によらないことを用いる．

質問： 授業の始めにやった $F(x,y) = x^2 - y^3$ の説明中，3 乗根の中の x の絶対値をつけるのをやめた理由が分かりません．$x = \pm\sqrt{y^3}$ の y^3 に絶対値をつけないのは $x^2 = y^3 \geqq 0$ だからなのだと思ったのですが，x は負もとり得ますよね? なぜ絶対値いらないんですか? **お答え：**$\varphi(x) = \sqrt[3]{x^2}$ の微分を $\varphi'(x) = 2/3\sqrt[3]{x}$ と書いたところ：$x < 0$ でもこの式は意味がある．実際 $\varphi(x) = (\sqrt[3]{x})^2$ なので $\varphi'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ は x が正でも負でも成り立つ．

質問： 積分する際に I の分割 Δ の幅をどんどん小さくしていくなら，なぜ $|\Delta| = \max\{$ 略 $\}$ と最大の数をとるのでしょうか．始めから $|\Delta| = \min\{$ 略 $\}$ とすれば良いのではないのでしょうか? **お答え：**2 以上の整数 n をとって，区間 $I = [0,1]$ の分割 Δ を $x_0 = 0$, $x_1 = 1/n$, $x_2 = 1$ とすると，$\min\{x_1 - x_0, x_2 - x_1\} = 1/n$ で n をどんどん大きくするとこの値は 0 に近づく．この例は本当に「分割の幅をどんどん小さくした」と思えますか．

質問： この講議（原文ママ；この資料では何回も誤りを晒しているが，効果はないんでしょうか！）を見ている高校生は高校で習う微分積分の範囲をすべて習い終えているのですか?

お答え： どうでしょう．当方は，教室の学生諸君にあわせて講義をして，それを中継する，というスタンスです．

質問： プリントではどうして「。」を「.」と表記したり「、」を「,」と表記するのですか．

お答え： 横書きの句読点については『国語の書き表わし方』（文部省，1950；送り仮名の使い方が古いルールに従っていますね）で「，。」を用いる，とされていますが，数式・欧文混じりの場合には「，.」を使うのが多数派（事実上標準）です．たとえば，数式は文の一部（名詞句）ですから，文の終わりに来るときは句点が必要（講義ノート 53 ページの 5 行目の式参照）ですが，これが「。」だと座りが悪いのです．(cf. `http://yebisu.cc.kyushu-u.ac.jp/~watanabe/RESERCH/MANUSCRIPT/OTHERS/YOKO/ten.pdf`)

質問： 先生の難しい授業に “愛” を感じるボクは変態ですか． **お答え：**はい．

質問： 最近，急に暑くなってきましたね．社会はオレに冷たいけど． **お答え：**あ，そう．

質問： 中間試験の範囲はどこまでですか． **お答え：**今回予告します．