微分積分学第一 (10)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2014/calc1/

2014.06.18

おしらせ

- 次週 6 月 25 日（水）に**中間試験**を行います．詳細は Web で
- 今回は提出物の受付をいたしません．

Q: 中間試験のとき必要ではない持ち物はどこに置いておけばいいですか?

A: 鞄に入れて足元におく．

Q: テストに時計は持ち込んでも良いですか?

A: いいえ，こちらで用意します．

Q: 試験のとき計算用紙は配られますか．

A: いいえ．解答用紙の裏面をご利用ください．
ご要望により用意したことがあるのですが，
(1) 利用率が低かったこと（10% くらい）
(2) 要望を出した人が答案用紙の裏面を全く使っていない
という 2 点から無駄を省きました．

質問・要望（中間試験特集!）

Q: 例年の中間テストの平均点や，人数の得点分布を教えてください．期末テストも教えていただければ幸いです．
今年出す問題も教えていただければもっと幸いです．

A: 平均点や分布を出して何に使うのか，有効な使い方があるかがわかりませんので，出しません．万が一出すとなった場合は完全公開としますが，そのほうが差し支えがあると思います．
問題は教えられません．直前まで出来上がらないから．

Q: 中間試験には今回の講義で扱ったような（例えば $y = \frac{1}{2}x^2$ の $0 \le x \le 1$ での長さ L を求める）積分計算がでてくると覚悟した方がいいですか?

Q: 中間試験では積分はどれくらいの割合で出題されますか?

Q: 中間試験の問題数はどれくらいでしょうか?

A: まだ作っていませんので不明．

質問・要望（中間試験特集!）

Q: **テストなどでは**

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \quad (-\pi \le t \le \pi, a > b > 0)$$

の曲線の長さを答える問題では

$$4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2 t}\, dt$$

とだけ答えればよいのですか．

A: **これで正しい，とあなたが思う式を書けばよい．**
もっと簡単にできることを知っているなら簡単にすればよいし，もう簡単にできないことを知っているならばそこで止めればよい．知らなければそれで終わり．
山田の試験は問題をよく読めば答えの書き方は自明のはず．

Q and A

Q: 3 点ください．お願いします!
何でもしますから!

A: 第 9 回講義の提示資料にあるような条件をみたす提出物を出して下さい．

講義の内容を聞き取り，講義資料を読み込んで（ある程度正しく聞き取れ，読み取れていることが前提），自分で考えた上で疑問点が伝わるように書かれていれば 3 点だします．

積分可能性

$I = [a, b]$ 上の 1 変数関数 f と，I の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ に対して

$$\overline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{N} \overline{f}_j \Delta x_j, \quad \underline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{N} \underline{f}_j \Delta x_j, \quad \Delta x_j = x_j - x_{j-1}$$

と定める．ただし

$$\overline{f}_j := (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } f \text{ の "最大値"}),$$
$$\underline{f}_j := (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } f \text{ の "最小値"}).$$

Definition

f が I で積分可能とは I の分割 Δ の幅をどんどん小さくしたとき $\overline{S}_\Delta$, $\underline{S}_\Delta$ の値が同じ値に近づくことで，その値を次のように書く：

$$\int_I f(x)\,dx \quad \left(= \int_a^b f(x)\,dx \right)$$

Δ を細かくする仕方は任意

積分可能性

Q: **分割の幅の値はすべて等しくないといけないのですか．**

A: **いいえ，幅はばらばらであってもよいです．**

Q: $f(x) = \frac{1}{x}$ **を区間** $[-1, 1]$ **で積分すると，どうなりますか．** $x = 0$ **で定義されていないけど，奇関数なので** 0 **になるように思えて，よくわかりません．**

A: **積分可能でない．**

区分求積

Q: **高校の区分求積の説明では，区間 I で定義された** 1 **変数関数** f **を積分する際，区間** I **を等割分割していました．山田教授は大学での積分の定義をこのように複雑にするのは定理** 9.8 **や初等関数で描けない関数を扱うためとおっしゃっていましたが，区間** I **の等割分割でなく，不等割分割としていることのメリットはあるのでしょうか．プリントに出ている定理の証明はいずれも区間** I **の等割分割という解釈で定義しても証明できると思うのですが．**

A: **補題** 9.6

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

は簡単に証明できる?

連続関数の積分可能性

Theorem

閉区間 $I = [a, b]$ で定義された連続関数 f は I で積分可能である．

積分可能ならば

$$\overline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{N} \overline{f}_j \Delta x_j, \quad \underline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{N} \underline{f}_j \Delta x_j$$

は Δ をどのように細かくしていっても同じ値に近づく．

積分可能な場合

- f: 区間 $[a, b]$ 上の連続関数
- $\Delta^{(m)} = \{x_0^{(m)}, x_1^{(m)}, \dots, x_{N_m}^{(m)}\}$ $(m = 1, 2, \dots)$：
  区間 $[a, b]$ の分割の列で $|\Delta^{(m)}| \to 0$ $(m \to \infty)$
- $\xi_j^{(m)} \in [x_{j-1}^{(m)}, x_j^{(m)}]$ $(j = 1, \dots, N_m, m = 1, 2, \dots)$

とすると

$$\sum_{j=1}^{N_m} f(\xi_j^{(m)})(x_j^{(m)} - x_{j-1}^{(m)}) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \quad (m \to \infty).$$

理由：

$$\underline{S}_{\Delta^{(m)}}(f) \le \sum_{j=1}^{N_m} f(\xi_j^{(m)})(x_j^{(m)} - x_{j-1}^{(m)}) \le \overline{S}_{\Delta^{(m)}}(f)$$

積分可能性から左辺と右辺は同じ値に収束する．

問題 9-6

空間に半径 R の球体がある．中心からの距離 r における球体の (体積) 密度が $\rho = \rho(r)\mathrm{kg/m^3}$ で与えられるとき，球体の質量を ρ を用いて表しなさい．ただし ρ は $[0, R]$ で定義された連続関数である．