2014 年 6 月 18 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 10

お知らせ

前回予告しましたように，来週は中間試験を行います．したがって，**今回は提出物の受付をいたしません．**

前回までの訂正

- 楕円の弧長の計算で $4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt$ の sin は cos の誤りというご指摘がありましたが，**誤りではありません．** 口頭で述べたが，$t=\frac{\pi}{2}-u$ とおいて置換積分，u を再び t と書き直して整理すれば最後の式がでる．「楕円積分」は習慣的にこう定義するので，sin を用いた式に書き換えたと説明しました．
- 講義ノート 80 ページの最後の注釈：「2 次元版であるが，重積分の...」以下を「2 次元版である．」として以下削除．実際，領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ が単連結なら，与えられた f に対して $G_x - F_y = f$ となる F, G が存在する．しかしそれを求めるのは（一般に）重積分の計算をレシピ通りにやるより難しい．

授業に関する御意見

- 例年の中間テストの平均点や，人数の得点分布を教えてください．期末テストも教えていただければ幸いです．今年出す問題も教えていただければもっと幸いです．
  山田のコメント： 平均点や分布を出して何に使うのか，有効な使い方があるかがわかりませんので，出しません．万が一出すとなった場合は完全公開としますが，そのほうが差し支えがあると思います．問題は教えられません．直前まで出来上がらないから．
- 中間試験のとき必要ではない持ち物はどこに置いておけばいいですか？ **山田のコメント：** 鞄に入れて足元におく．
- 試験の注意事項がとても面白かったです． **山田のコメント：** 10 年以上使っているので，そろそろ変えないと．
- 計算機を使いこなせるようになりたいと思いました． **山田のコメント：** 生活のために必須です．
- 初等関数の定義を聞いて，初等関数以外の関数は今まで見たことがあまりなかったので，初等でない関数がどこで役に立つのか疑問でしたが，本日の授業で少し分かりました．
  山田のコメント： 関数が「式でかけなければいけない」というのもまた偏狭なんですよね．
- この授業プリント以外で，おすすめの副読本はありますか．あったら教えてください． **山田のコメント：** 結城浩，「数学ガール」シリーズ（とかじゃなくて?）
- さらされた人を高校生はどう思いながら見ているのでしょうか． **山田のコメント：** 人はさらしていないと思います．
- 先生の授業は家のパソコンで見れますか？（授業に行かれない日がでてきそうなので） **山田のコメント：** 多分だめ．教育工学開発センター（http://www.cradle.titech.ac.jp/koudai/ から検索）で確かめてみてください．

質問と回答

質問： 高校数学の積分の定義は使えないが，用いる技法までは変わらないように思えます．

お答え： 全くそのとおり．違うものを扱っているのではないですから．

質問： グラフ $y=\cosh x$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の長さ L について答えは $\sinh 1$ ですが，$\sinh = \frac{e^1-e^{-1}}{2} = \frac{e^2-1}{2e}$ のように変形しない理由はありますか?（原文ママ；左辺は $\sinh 1$）

お答え： どちらでも良いです．電卓などでは $\sinh 1$ はそのまま計算できることが多いので，このままにしています．

質問： $x=\sinh u$ と置換していましたが，$t=x+\sqrt{1+x^2}$ の置換で解いてもいいですか? それともこういうような高等学校の解き方だとできない積分がでてきますか? $/\sqrt{1+x^2}$ の x を $\sinh u$ で置換するのと $\tan v$ で置換するのではどのような変化があるのですか? 使い分けとかはあるのですか．

お答え： 答えは同じ（当たり前）．どうおいても答えが合えばよい．

質問： $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ の計算は $x=\sinh u$ とおく以外の方法はありますか． **お答え：** $(x')\sqrt{1+x^2}$ と書き換えて，部分積分で $1/\sqrt{1+x^2}$ の積分に帰着させる，という一言を講義の際にいいましたね．

質問： $x=\sinh u$ と置換するのはどのように思いつけばいいですか．暗記モノでしょうか?

お答え： 慣れです．「どのように」と「思いつく」は親和性が低いですね．

質問： 9-4 ですが，(長さ) $=\int_0^a\sqrt{1+4x^2}\,dx$ となりますが，置換は $x=\frac{1}{2}\sin t$ とおき，$x\colon\ \to a$, $t\colon 0\to\alpha$ とやろうとすると，長さに α がでてしまいます．どこがまちがっていますか? 置換のしかたがまちがっているのでしょうか． **お答え：** (1) ご質問のような置換をすると多分うまく行きません．講義でやった例と本質的には同じ．(2) ご質問のように置き換えるなら $\alpha=\sin^{-1}(2a)$ では?（ひょっとして知識が高等学校で止まっていませんか?）

質問： 微分と積分が割り算と掛け算のような関係のものだとしたら，なぜ微分と積分を別々に考えられていたのですか．

お答え： 微分のほうが新しいのは，掛け算より割り算のほうが「難しい」のと同じ感じですね．

質問： $\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x$ の近似の証明のとき $\sqrt{1-x}=1-y$, $1-x=1-2y+y^2$ は，$f(a+h)-f(a)=Ah+\varepsilon(h)h$ と同じように考る（原文ママ：考える?）のですか? **お答え：**そう．近いですね．

質問： p. 65 $|\Delta|:=\max\{|x_1-x_0|,|x_2-x_1|,\dots,|x_N-x_{N-1}|\}$ とありますが，どうしてわざわざ max と書く必要があるのでしょうか? **お答え：**括弧の中の N 個の数の並びの中の一番大きいものをとって一つの数にしています．

質問： 連続関数でなくても積分可能なものがありますが，そのようなものについて (9.10) のような微積分の基本定理はありますか? **お答え：**ありません．

質問： 積分可能性の証明は ε-δ 論法を用いて証明するのでしょうか．あと『$\mathbb{R}^2$ の面積確定なコンパクト集合 D 上で定義された関数 f が D で積分可能ならば，f は D で連続である．』この命題は真ですか?

お答え： 前半：まあそう．後半：偽．$\mathbb{R}$ でも偽．例 9.3 は「閉区間で定義された積分可能な関数で連続でないもの」の例．

質問： 分割の幅の値はすべて等しくないといけないのですか． **お答え：**いいえ，幅はばらばらであってもよいです．

質問： 高校の区分求積の説明では，区間 I で定義された 1 変数関数 f を積分する際，区間 I を等割分割していました．山田教授は大学での積分の定義をこのように複雑にするのは定理 9.8 や初等関数で描けない関数を扱うためとおっしゃっていましたが，区間 I の等割分割でなく，不等割分割としていることのメリットはあるのでしょうか．プリントに出ている定理の証明はいずれも区間 I の等割分割という解釈で定義しても証明できると思うのですが．

お答え： 補題 9.6 の証明は難しいのでは? $\int_a^b f(x)\,dx$ と $\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ の関係ですが，区間 $[a,b]$ を等割分割すると，その分点は区間 $[a,c]$ の等割分割の分点になるとは限りません．

質問： $f(x)=\frac{1}{x}$ を区間 $[-1,1]$ で積分すると，どうなりますか．$x=0$ で定義されていないけど，奇関数なので 0 になるように思えて，よくわかりません．

お答え： むりやり奇関数にするために $f(0)=0$ としておきましょう．結論として，この f は $[-1,1]$ で積分可能ではありません．

質問： 講義ノート p. 68 の積分の三角不等式（略）はなぜ「三角」不等式と言うのでしょうか? 「三角」のここでの意味を教えて下さい．

お答え： 「三角形の 2 辺の長さの和は他の一辺の長さより大である」が三角不等式の原義．ベクトルで表すと $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqq|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$．ただし，ここで “$\leqq$” としたのは，三角形がつぶれている場合も考えたいから．とくに，つぶれている場合は，三角形の 3 頂点が数直線 $\mathbb{R}$ 上にある場合と考えると三角不等式は $|a+b|\leqq|a|+|b|$ $(a,b\in\mathbb{R})$ となる．積分の三角不等式は，$f(x)\Delta x$ の総和をとってから絶対値をとるのと $|f(x)|\Delta x$ の総和をとるものの大小関係なので，実数の三角不等式の一般化とみなせるので，習慣的に「三角不等式」といいます．

質問： 講義ノート p69 定理 9.10 の 11 行目で $\frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}\{f(t)-f(x)\}\,dt\right|\leqq\frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}\bigl|f(t)-f(x)\bigr|\,dt\right|$ は $\frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}\{f(t)-f(x)\}\,dt\right|\leqq\frac{1}{|h|}\int_x^{x+h}\bigl|f(t)-f(x)\bigr|\,dt$ ではないのですか．どうして絶対値がつくのか分かりません． **お答え：**$h<0$ のとき，積分が負になるが，絶対値をとった不等式は成り立つ（理由はわかるだろうか？）．

質問： 講義ノート p. 69 の「微積分学の基本定理」の証明で分からない点がいくつかありました．式変形 $\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|=\frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}f(t)\,dt-\int_x^{x+h}f(x)\,dt\right|$ (?) と $\frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}g(t_n)\,dt\right|=\frac{1}{|h|}|h|g(t_n)$ (?) その他分からない… $g(t)$ と $g(t_n)$ の違い．$g(t_n)-g(t)=0$ (?)

お答え： 質問がどのように扱われるかはご存知でしょうが，こういう書き方では「わからないこと」を他の皆さんと共有できないのでは? 「読み取れる」質問をする努力をしてください（それが課題）．最初の ? ですが，t を動かした時 $f(x)$ は一定だから，$\int_x^{x+h}f(x)\,dt=h\,f(x)$．二番目も t_n は t に関して一定なので同様．t_n のとりかたは証明の 11 行目．書いてあるように $t_n\to x$ だから，g の連続性から $g(t_n)\to g(x)$（きちんと読みましょう）．

質問： 第 9 回 p. 71，命題 9.14 の証明について $I_\Delta=\sum_{j=1}^N\sqrt{1+\left(\frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{x_j-x_{j-1}}\right)^2}(x_j-x_{j-1})$ は何を表しているのでしょうか．また，$I_\Delta=\displaystyle\sum_{j=1}^N\sqrt{1+\bigl(f'(\xi_j)\bigr)^2}(x_j-x_{j-1})\leqq\sum_{j=1}^N\overline{F_j}\Delta_j$, $I_\Delta\geqq\displaystyle\sum_{j=1}^N\underline{F_j}\Delta_j$ は，はさみうちをするための手順なのでしょうか．証明がよく分かりません．

お答え： 前半：$\sqrt{(x_j-x_{j-1})^2+\bigl(f(x_j)-f(x_{j-1})\bigr)^2}$ から x_j-x_{j-1} をくくりだした．後半：ただ「この式が成り立つ」といっているだけです．もちろんその後に「はさみうち」をしますが．

質問： パラメータ t により $\delta(t)=\bigl(x(t),y(t),z(t)\bigr)$ $(a\leqq t\leqq b)$ と表示された曲線の長さならば $\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$ でいいですか? **お答え：**よいです．

質問： 例 9.12 について，$x \in \mathbb{R}$ で定義された連続関数 e^{-x^2} の原始関数は FTC より $\int_\alpha^x e^{-t^2}\,dt$ であり α を $\mathbb{R}$ 上で動かしても原始関数の定数だけしか変化しないので，特に定数を 0 としたときの原始関数は $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ になる，という理解でよいですか? **お答え：**FTC って何?．Federal Trade Commission?「ひとりよがりの記号や用語は断りなしに使わない」こと．ご質問ですが，**違っています**.「連続関数 $f(x)$ の原始関数は $\int_\alpha^x f(t)\,dt$」は正しくない.「$\int_\alpha^x f(t)\,dt$ は $f(x)$ の原始関数」は正しい．たとえば $f(x)=\cos x$ とすると，$g(x)=\sin x+5$ は $f(x)$ の原始関数ですが，$\int_\alpha^x \cos t\,dt=\sin x-\sin\alpha$ が $g(x)$ と一致するような α は存在しない．ご質問の文脈では (1) $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ は e^{-x^2} の原始関数である．(2) 一般に区間 I で定義された連続関数 f の原始関数 F と G の差は定数になる．(3) したがって e^{-x^2} の原始関数は $C+\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ である．ということです.

質問： 例 9.12 をみたかんじだと，変数の差であるとき，$\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ の値を求めるのはメンドウなのですね.

お答え： 違います.「$f(x)$ の原始関数は定数の差をのぞいて $F(x)$ である」というのは「$f(x)$ の原始関数は $F(x)+$定数という形にかける」と同義．方言的な言い回しですが，よく使うので覚えましょう.

質問： 区間 I で連続な関数であれば原始関数があるということでしたが，関数 e^{-x^2} のように「原始関数は数式で表せないが，原始関数がある」というのがよくわかりません. **お答え：**定数 $+\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ は数式では?

質問：「原始関数が初等関数で表すことができない」というのは初等関数でない別の関数でなら表すことができるということでしょうか．もしそうであれば（見ても意味は分からないと思いますが）どのように表すことができるのか示してほしいです. **お答え：**何を求めているかわかりません．例 9.12 は「式」で表されています．ちなみに $\operatorname{erf}(x):=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ で定義される関数を「誤差関数」とよぶ．これを使えば $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(x)$ は e^{-x^2} の原始関数.

質問： $\int e^{x^2}\,dx$ のように積分した式を $\int$ を用いないと表現できないものについては $\int e^{x^2}\,dx$ が log といった新しい関数であるとみなせばいいのですか? **お答え：**そうです.

質問： 楕円積分のように原始関数を初等関数で表わせないものの例を他にいくつか見たいので教えて下さい.

お答え： e^{-x^2}．楕円積分や，この関数の原始関数．このあたりはすぐに思い浮かびますよね.

質問： 授業の終盤で $f(x)=e^{-x^2}$ の原始関数は初等関数で表せないと言っていましたが，$f(x)=e^{x^2}$ の原始関数も同様ですか. **お答え：**はい.

質問： 自分が聞き逃しただけかもしれませんが，楕円積分で原始関数が初等関数で表せないことの証明はありますか? **お答え：**証明された事実．講義でコメントしたが，山田はきちんとフォローしていません．多分 Liouville による.

質問： 楕円の面積（原文ママ；弧長です）を表す式を書いたとき，$4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt$ と $\cos t$ を $\sin t$ にしていました．なぜですか? 自分は $\cos t$ のままでもよいと思ったのですが...

お答え： よいのですが，習慣にしたがって sin に書き換える，と講義中にコメントしましたね.

質問： $l=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt$ $(0<e<1)$ において，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt$ は初等関数では表わせないが，l の値は存在するということでしたが結局 l はどのようにして求めるのですか? **お答え：**具体的な e を与えれば，計算機などで近似値を求めることはできます．e が小さいときの近似の方法は講義で扱いましたね.

質問： 初等関数ではない関数全体に呼び名はありますか? **お答え：**ありません.「初等関数」が特別なのです.

質問： 楕円積分の原始関数は初等関数でない関数で表されるのでしょうか?

お答え：「初等関数でない関数である」が正しいですね．実際，楕円積分の原始関数は微分すると楕円積分，これは初等関数でない．一方，初等関数の微分は（その定義から）初等関数である.

質問： 初等関数で表せない積分計算は多くありますが，初等関数自体はもう出つくしているのですか．これから増えることはありますか. **お答え：**初等関数の定義（第 4 回）から「増えるかもしれない」と思った理由は?

質問： 微分可能であることと積分可能であることは何か関連性があるのでしょうか?

お答え： 閉区間で連続なら積分可能（定理 9.8），連続でも微分可能でない関数が存在する．すなわち積分可能であっても微分可能でない関数が存在する．一方，微分可能なら連続だから，微分可能なら（閉区間で）積分可能.

質問： 講義ノートの例 9.3 で，$y=f(x)$ をグラフ化した際に $0\leqq x\leqq 1$ の間で $h=f(x)$ と $y=0$ で囲まれる図形は下のような直線（原文ママ：下のような，の意味がわからない）で表されると思うのですが，計算すると（積分値）$=0$，線分に面積はないということになります．これは，線分を集めると面積になるという高校までの積分の教え方と矛盾するのではないでしょうか?（線分 $\neq$ 微小区間ということでしょうか?）

お答え： 下のような，わかりませんが，例 9.3 のような変態な例ではなく，$f(x)=0$（定数関数）の $[0,1]$ 区間の積分は高校生にとっても 0 ではないですか?「高校までの教え方」はたぶん，あなたが誤解しているだけだと思います.

質問： 6/4 の講義で $C=$ (略; Cassinian oval) を扱い，y^2 についてとき，(略：x の動く範囲を求め) 最後に $\varphi'=0\Leftrightarrow x=0$ or $1-x^2-y^2=0$ を導きましたが，何を示すためだったのか，その目的が分からなかったので，授業中に

ついていけませんでした．どういう目的でしたか． **お答え：**定義式を $y=\varphi(x)$ と解いて，φ のグラフを書く．このとき φ の定義域を求め，$\varphi'=0$ となる点（極値をとるかもしれない点）を求める．高等学校で習ったことと全く同じことです．唯一違うのは φ の具体的な表示式を使わなかったこと．

質問： e が 10 進法や 2 進法に依存しないという意味がよく分かりませんでした．$e=2.7\dots$ であり 10 進法の数なので依存するのではないのですか． **お答え：**いいえ．数直線上の 1 点をとったとき，それが 10 進法の数であるかどうかを判定することができるでしょうか．e の定義は（文脈にもよりますが）$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ です．この定義は数の表記の仕方とは関係ありません．なお，$e=2.7\dots$ という形では e を定義したことにはなりません．

質問： 単振動方程式で $\dot{x}$ をかけて解く時，他の運動方程式では仕事率の項がでてくるということですか?

お答え： ご質問の意味がわからないので，具体的に書いていただきたいと思います．「単振動方程式を解くときに他の運動方程式では」というときの 2 つの方程式の関係がよくわからないんです．

質問： 物理でよく聞く線積分とはまた積分とは違うものなのですか? **お答え：**講義ノート p. 80 をご覧ください．

質問： 「微積分学の基本定理」をもとに求積のための積分が生み出されたのですか? それとも求積のための積分をもとに「微積分学の基本定理」が生み出されたのですか? **お答え：**「求積のための積分」が何を指しているのかわかりません．講義でコメントしたように「求積」はギリシア時代から行われています．

質問： 今回の講義ではなぜ道のりを求める話からはじめたのでしょうか．微積分学の基本定理などの話を後半にもってきた理由がわかりません． **お答え：**積分が初等関数でないことがあることを，実感として知って欲しいから．

質問： 授業の中で不定積分では表せない (?) けど，定積分では表すことができて授業で取り扱っていましたが，数学の歴史で不定積分より定積分の方が歴史が長いとか高校で聞いたのですが，それは不定積分が表せるならば，定積分が表すことができるということですか? 不定積分で表せる $\Leftrightarrow$ 定積分で表せる，は成り立ちますか?

お答え： (1) ご自分の文を読み返してみましょう．変では? (2) 「不定積分が表せる」「不定積分で表せる」という 2 つのフレーズがありますが，これは同じ意味ですか，それとも異なる意味ですか? いずれにせよ意味がわかりません．

質問： なぜ弧長の問題は高校の範囲から消えたのですか? **お答え：**決める立場にいなかったので知りません．

質問： 高等学校の教科書の積分の定義が正しいとは言えないことは分かりましたが，ではなぜ今回の定積分の定義を学習しないのでしょうか? **お答え：**この授業でも定義を出発点にして「きちんと」議論していません．たとえば連続関数の積分可能性は証明していない．指導要領の策定には携わっていないですが，「難しいから」と思います．

質問： テストなどでは $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(-\pi\leqq t\leqq\pi,\ a>b>0)$ の曲線の長さを答える問題では $4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2 t}\,dt$ とだけ答えればよいのですか． **お答え：**これで正しい，とあなたが思う式を書けばよい．もっと簡単にできることを知っているなら簡単にすればよいし，もう簡単にできないことを知っているならばそこで止めればよい．知らなければそれで終わり．山田の試験は問題をよく読めば答えの書き方は自明のはず．

質問： 3 点ください．お願いします! 何でもしますから! **お答え：**第 9 回講義の提示資料にあるような条件をみたす提出物を出して下さい．少なくとも，講義を聞き取り，講義ノートを読み込みましょう（何でもするんですよね!）．

質問： テストに時計は持ち込んでも良いですか? **お答え：**いいえ，こちらで用意します．

質問： 試験のとき計算用紙は配られますか． **お答え：**いいえ．解答用紙の裏面をご利用ください．ご要望があったので配ったことがあるのですが，(1) 利用率が低かったこと（10% くらい）(2) 計算用紙がほしい，という要望を出した人が答案用紙の裏面を全く使っていなかった，という 2 点から無駄をしないようにしました．

質問： 中間試験には今回の講義で扱ったような（例えば $y=\frac{1}{2}x^2$ の $0\leqq x\leqq 1$ での長さ L を求める）積分計算がでてくると覚悟した方がいいですか? **お答え：**知りません．

質問： 中間試験の問題数はどれくらいでしょうか? **お答え：**問題の形式として，数え方が微妙．

質問： 中間試験では積分はどれくらいの割合で出題されますか? **お答え：**まだ考えていません．