2014 年 6 月 25 日 10 時 45 分 ~12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 中間試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解することができるように書いてください.
- 解答用紙の裏面・余白は下書き, 計算などに使用して良いですが, 採点の対象とはしません.
- 試験終了後は, **解答用紙**と**持込用紙**を回収します. **持込用紙には学籍番号と氏名を記してください**. 問題用紙は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は 7 月 2 日の授業開始前および終了後に返却いたします. それ以降は**数学事務室 (本館 3 階 332B)** に預けますのでそちらで受け取って下さい.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は, 7 月 2 日の授業終了後に申し出て頂くか, 7 月 9 日までに山田まで電子メイルでお申し出下さい. なお, 管理の都合上, 上記期日以降のクレイムは, **たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**. ご了承下さい.

指定用紙のみ持込可

問題 A 次の文中の $\boxed{1}$ ~ $\boxed{13}$ にもっともよく充てはまる数・式・言葉を入れなさい. [45 点]

$\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数

$$f(x,y) = x^2 + x^2y + y^3 - 1$$

の偏導関数をすべて求めると $\boxed{1}$, 2 次偏導関数をすべて求めると $\boxed{2}$ である.
時刻 $t = 0$ で点 $P = (1,0)$ を通る直線（運動）

$$(*) \qquad \bigl(x(t), y(t)\bigr) = (1 + at, bt) \qquad \bigl(a,\ b \text{ は定数で } (a,b) \neq (0,0)\bigr)$$

に対して $F(t) := f\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ とおくと，$F(t)$ の $t = 0$ における微分係数は $\boxed{3}$ と a, b を用いて表される．特に，$a = 1$, $b = -1$ のとき，位置 (x,y) における標高が $f(x,y)$ で表されるような地形を直線 $(*)$ にそって歩く人は点 P を通過したときに坂を $\boxed{4}$ （“登っている”，または “下っている” が入る）.
次に，集合

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\},$$

すなわち関数 $f(x,y)$ の高さ 0 の等高線を考える．この図形は，C^∞-級の関数 g のグラフ $y = g(x)$ と表すことができ,（ということは既知として用いて良い）とくに $g(1) = \boxed{5}$ である．このとき，g の導関数と 2 次導関数は

$$y' = g'(x) = \boxed{6}, \qquad y'' = g''(x) = \boxed{7}$$

のように x と y の有理式（多項式の商の形）で表される．とくに $g'(1) = \boxed{8}$, $g''(1) = \boxed{9}$ と具体的に値が求まる．さらに $\boxed{6} = 0$ と $f(x,y) = 0$ を同時に満たす点は $(x,y) = (\boxed{10}, \boxed{11})$ となり，とくに $g''(\boxed{10}) = \boxed{12}$ であるから，関数 $g(x)$ は $x = \boxed{10}$ で $\boxed{13}$ (“極大値” または “極小値” が入る) をとる.

裏面につづく

問題 B 次の文中の $\boxed{\ 1\ }$〜$\boxed{\ 19\ }$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい． [35 点]

一変数関数 $\varphi(t) := 4\tan^{-1} e^{pt}$ (p は定数) の 2 次導関数は $\varphi''(t) = \boxed{\ 1\ }$ と双曲線関数を用いて表される．とくに，正の定数 λ に対して $\varphi''(t) = \lambda \sin\varphi(t)$ が成り立つような p の値は $\boxed{\ 2\ }$ である．

さて，0 でない定数 a に対して xy 平面上で定義された 2 つの 2 変数関数

$$(*) \qquad u = u(x,y) = ax + \frac{y}{a}, \qquad v = v(x,y) = ax - \frac{y}{a}$$

を考えると，u の偏導関数は $\boxed{\ 3\ }$, v の偏導関数は $\boxed{\ 4\ }$ と x, y の具体的な式で表される．対応 $(x,y) \mapsto (u,v)$ は xy 平面を uv 平面に 1 対 1 に写す．とくに逆の対応 $(u,v) \mapsto (x,y)$ を $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ と書いておく（具体的に求めなくてもよい）．このとき xy 平面上の領域 D で定義された C^2-級関数 $f(x,y)$ に対して $\tilde{f}(u,v) = f\bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr)$ とおくと， チェイン・ルールから

$$\tilde{f}_u = \boxed{\ 5\ } f_x + \boxed{\ 6\ } f_y, \qquad \tilde{f}_v = \boxed{\ 7\ } f_x + \boxed{\ 8\ } f_y$$

が成り立つ．また，$f(x,y) = \tilde{f}\bigl(u(x,y), v(x,y)\bigr)$ となるので，

$$f_x = \boxed{\ 9\ } \tilde{f}_u + \boxed{\ 10\ } \tilde{f}_v, \qquad f_y = \boxed{\ 11\ } \tilde{f}_u + \boxed{\ 12\ } \tilde{f}_v,$$

さらに微分して

$$f_{xy} = \boxed{\ 13\ } \tilde{f}_{uu} + \boxed{\ 14\ } \tilde{f}_{uv} + \boxed{\ 15\ } \tilde{f}_{vv} + \boxed{\ 16\ } \tilde{f}_u + \boxed{\ 17\ } \tilde{f}_v$$

が成り立つ．

とくに $\tilde{f}(u,v) = F(u)$ の形で表される関数 $\tilde{f}$ に対して $f(x,y) = \tilde{f}\bigl(u(x,y), v(x,y)\bigr)$ をおくとき，$F(u) = \boxed{\ 18\ }$ とおけば $f_{xy} = \sin f$ が成り立つ（$\boxed{\ 18\ }$ に入る関数はただひとつには定まらないが，恒等的に 0 とならない関数を具体的に入れる）．これに対応する (x,y) の関数は $f(x,y) = \boxed{\ 19\ }$ となる．

問題 C 次の文中の $\boxed{\ 1\ }$〜$\boxed{\ 9\ }$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい． [10 点]

xy 平面の部分集合 $E = \bigl\{(x,y) \,|\, x^3 \leqq y \leqq 1, 0 \leqq x \leqq 1\bigr\}$ を含む領域で定義された連続関数 $f(x,y)$ の E 上の積分は，

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}} \left[\int_{\boxed{3}}^{\boxed{4}} f(x,y)\,dy\right] dx = \int_{\boxed{5}}^{\boxed{6}} \left[\int_{\boxed{7}}^{\boxed{8}} f(x,y)\,dx\right] dy$$

と，2 通りの方法で累次積分で表すことができる．とくに次が成り立つ：

$$\iint_E \frac{x^5 y^2}{(1+x^6)^2}\,dx\,dy = \boxed{\ 9\ }.$$

問題 D つぎの 1 変数関数 f について以下の問いに答えなさい． [10 点]

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

(1) f の導関数 f' を求めなさい．

(2) f' は 0 で連続か．理由をつけて答えなさい．

問題 E [0 点] この科目の授業，教材，試験などについて，御意見，ご希望，誹謗，中傷など，なんでもご自由にお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません．

おつかれさまでした ♡

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：1–2: 各 5 点, 3–4:5 点, 5–7:各 5 点, 8–9:5 点, 10–11:5 点, 12–13:5 点

1

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(y+1), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(y+1), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

3	4	5
$2a + b$	登っている	0

6

$$-\frac{2x(y+1)}{x^2+3y^2}$$

7

$$\frac{6(y+1)(x^4 - 3y^4 - 2x^2y^2 - 4x^2y)}{(x^2+3y^2)^3}$$

8	9	10	11	12	13
-2	6	0	1	$-\frac{4}{3}$	極大値

計算スペース（採点の対象にはしません）

1: x, y の式が二つ書いてあるが，どれが f_x でどれが f_y かを明記していないものは不正解．2 も同様.

6–7: x, y の有理式で表す．なお，$f(x,y) = 0$ という条件があるので，表示のしかたは無限個ある．ただしければ正解にしているはずだが，見逃しがあったら教えてほしい.

8–9: 6–7 の解答と同期していれば正解とした.

12–13: 12 が 7, 10–11 と同期し，その結果と 13 が適合していれば正解．なお 12 で正（負）の数を答えた上で 13 で極大（極小）と答えた方，高等学校で勉強したことに立ち戻って下さい.

満点は 16 名

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：1–2:各 5 点，3–4:5 点, 5–8:5 点, 9–12:5 点, 13–17:5 点, 18–19:5 点

1	2	3	4
$-2p^2\dfrac{\sinh pt}{\cosh^2 pt}$	$\pm\sqrt{\lambda}$	$u_x = a,\ u_y = \dfrac{1}{a}$	$v_x = a,\quad v_y = -\dfrac{1}{a}$

5	6	7	8	9	10	11	12
$\dfrac{1}{2a}$	$\dfrac{a}{2}$	$\dfrac{1}{2a}$	$-\dfrac{a}{2}$	a	a	$\dfrac{1}{a}$	$-\dfrac{1}{a}$

13	14	15	16	17	18	19
1	0	-1	0	0	$4\tan^{-1} e^u$	$4\tan^{-1}\exp\left(ax + \dfrac{y}{a}\right)$

計算スペース（採点の対象にはしません）

1: 問題文の指示「双曲線関数」を使っていないものは不正解．双曲線関数がきちんと読み書きできることは，この科目の課題のひとつ．

2: $\tan\frac{\varphi}{4} = e^{pt}$ から $\cos\frac{\varphi}{2}$, $\sin\frac{\varphi}{2}$ が e^{pt} の有理式で表される．

3–4: たとえば $(a, \frac{1}{a})$ では不正解.

5–8: $\frac{\partial u}{\partial x}$ と $\frac{\partial x}{\partial u}$ の逆数は等しくない．何回も言ったはずだが 20 名程度がそれに相当する誤りをしていた.

18–19: 1, 2 が誘導になっていることに気づけばよい．方程式 $\varphi_{xy} = \sin\varphi$ は “sine Gordon equation” とよばれ，相対論的量子論，微分幾何学などに現れる．この解答で挙げた解は，その 1-ソリトン解，またはキンクとよばれるものである.

満点は 0 名

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄 配点：1–8:5 点，9:5 点

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	x^3	1	0	1	0	$\sqrt[3]{y}$	$\frac{1}{72}(3\pi-8)$

計算スペース（採点の対象にはしません）

8: $\sqrt[3]{x}$ という解答が複数．dx で積分するのだから，端点に x の式が来るのはおかしい．

9: ここに x, y が含まれるのはおかしい．また，積分領域上で被積分関数は正だから，積分の値は正でなければおかしい．

満点は 23 名

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 4〕

問題 D の解答欄 各 5 点'

(1)

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos \dfrac{1}{x} + x \sin \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \dfrac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$$

(2) 連続である

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

なので

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{2} = f'(0).$$

計算スペース（採点の対象にはしません）

1: $x \neq 0$ のときの微分が正しくできていない人あり（10 名以上）．$\left(\cos \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ です．cos の微分からマイナス，$1/x$ の微分からマイナスがでて相殺します．高等学校レベルですね．

1: $f'(0) = 0$ ではありません．不正解．また $f'(0)$ を明記していない方も不正解．

2: 0 に収束する数列 $\{x_n\}$ を具体的に 1 つとり，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(0)$ であるあら連続，という議論は誤り．

> $\lim_{x\to a} f(x) = A$ であるための必要十分条件は a に収束する 任意の 数列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ となること

です．したがって「たった 1 つの数列について」条件を確かめても $1/\infty$ の条件を確かめただけなので全然不足．ちなみに

> $\lim_{x\to a} f(x) = A$ で ない ための必要十分条件は a に収束する数列 $\{x_n\}$ で $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ が A に収束しないものが 少なくともひとつ 存在する．

昨年の中間試験の問題を見た方，この場合は連続でないことを示すので「特別な数列を一つ」とってやればよかったのです．

満点は 23 名

学籍番号			-						氏名	

2014 年 6 月 25 日 10 時 45 分 ∼12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 5〕

この用紙も回収します

問題 E [0 点] この科目の授業，教材，試験などについて，御意見，ご希望，誹謗，中傷など，なんでもご自由にお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切影響しません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- 2014 年度入学の方は，学籍番号のうち “14_” を除いた番号の席に着席してください．
- 2013 年度以前入学の方はご自分の名前のある席に着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 5 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
  提出物の学籍番号を間違えた方がいらっしゃいます．くれぐれも間違えないように．
- **解答用紙 5 枚 (この紙を含む) と持ち込み用紙はすべて提出**してください．持ち込み用紙を持参しなかった方は提出しなくて結構ですが，解答用紙が **5 枚揃っていない答案は採点いたしません**．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，解答用紙 5, 持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号			-						氏名	