微分積分学第一 (12)

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2014/calc1/

2014.07.09

お願いとお知らせ

授業評価アンケートにご協力下さい

- 東工大ポータル：授業評価【Course Evaluation】から
- できればいまここで!
- 回答数が少ないと，中の人が不機嫌に...
  採点に影響しないといいですが...

- 中間試験の答案は，数学事務室（本館 3 階 332B）にて絶賛返却中
- 定期試験は 7 月 30 日です．予告は中間試験の答案についています．

ご意見

ご意見： ヌベヂョンヌゾジョンベルミッティスモゲロンボョwwww キエエエエエエエwwwww

コメント： 手間かけさせやがって...

ご意見： 提出物の点とテストの点を単純に足したものが中間試験の点数となるのでしょうか．

コメント： なぜ足さなければいけないの? 中間試験の点数は中間試験の点数です．

ご意見： 後期の微積の授業も山田光太郎先生ですか?

コメント： 特別何かが起こらなければそうです（ごめんなさい）．

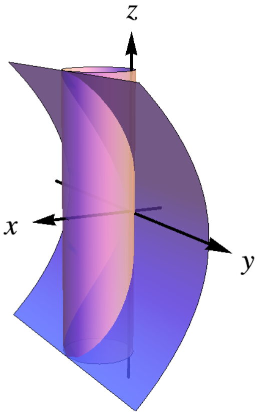
ご意見： ああ寒い．一枚着ても ああ寒い．

コメント： 場所を選んだらどうでしょう．

質問

Q: **例** 11.3 **において共通部分の体積というのは** $z^2 \leq 4x$ **は平面であるため共通部分も平面となるのではないでしょうか．**

A: $\{(x,y,z) \mid z^2 \leq 4x\}$ **は** $\mathbb{R}^3$ **の部分集合です．ここでは** yz **平面の部分集合と思ってはいけません：**



質問

Q: $r = f(\theta)$ の区間 $I = [a, b]$ における曲線の長さは
$L = \int_a^b \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta$ で表せるそうです．
曲線の微小な部分の長さ ΔL を考えます．
$\Delta L \doteqdot \sqrt{(dr)^2 + (r\, d\theta)^2}$ と考えているのでしょうか?
また，そうすることで $\Delta L = r\Delta\theta$ とするより近似の精度が高まるのでしょうか．

A: 質問の文章の設定が不足しているし，記号が少々混乱しているようなので， 補足しましょう（次のページ）

極座標

Theorem

平面の極座標 (r, θ) をもちいて

$$r = r(\theta) \qquad (a \leq \theta \leq b)$$

で表される曲線の長さは次で与えられる：

$$\int_a^b \sqrt{\bigl(r(\theta)\bigr)^2 + \bigl(r'(\theta)\bigr)^2}\, d\theta.$$

考えている曲線の xy 座標は

$$\bigl(x(\theta), y(\theta)\bigr) = \bigl(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta\bigr) \qquad (a \leq \theta \leq b)$$

とパラメータ θ で表されるので系 9.15 を用いる．

($r\Delta\theta$ vs. $\sqrt{(\Delta r)^2 + (r\Delta\theta)^2}$)

問題 11-4

xy 平面上の面積確定集合 D が上半平面 $\{(x, y) \mid y > 0\}$ に含まれているとする．このとき，次のことを確かめなさい．

1. xy 平面が座標空間に含まれているとみなす．D を x 軸の周りに一回転して得られる立体の体積は
$$2\pi \iint_D y\, dx\, dy$$
である．
2. D の重心の座標は
$$\frac{1}{|D|}\left(\iint_D x\, dx\, dy, \iint_D y\, dx\, dy\right) \qquad \left(|D| = \iint_D dx\, dy\right)$$
である．

Pappus-Gurdinus Theorem

問題 11-5

xy 平面上のなめらかな曲線 $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ を x 軸の周りに一回転させて得られる曲面の面積は

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

で与えられることを確かめなさい．ただし，区間 $[a, b]$ 上で $f(x) > 0$ であるとする．

問題 11-6

xy 平面上の曲線 C が

$$C : \big(x(t), y(t)\big) \qquad (a \leq t \leq b) \qquad \big(y(t) > 0\big)$$

とパラメータ表示されているとき

1. 曲線 C を x 軸の周りに一回転させて得られる曲面の面積は

$$2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

2. 曲線 C の重心の y 座標は

$$\frac{1}{L} \int_a^b y(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$\left(L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \right).$$